



实分析笔记

作者：吕浩哲 (Lucas Shen)

时间：February 14, 2025

封面：<https://www.pixiv.net/artworks/100631860>

悟已往之不谏，知来者之可追。——陶渊明

目录

第 1 章 测度论	1
1.1 预备理论	1
1.2 外测度	4
1.3 可测集与 Lebesgue 测度	6
1.3.1 σ -代数与 Borel 集	10
1.3.2 不可测集的例子	11
1.4 可测函数	12
1.4.1 可测函数及基本性质	12
1.4.2 由阶梯函数与简单函数逼近	14
1.4.3 Littlewood 三原理	16
1.5 Brunn-Minkowski 不等式	18
第 2 章 积分理论	21
2.1 Lebesgue 积分	21
2.2 可积函数空间 L^1	30
2.3 Fubini 定理	33
2.3.1 Fubini 定理的证明	33
2.3.2 Fubini 定理的应用	35
2.4 Fourier 变换的简单讨论	38
第 3 章 微分与积分	40
3.1 积分的微分	40
3.1.1 Hardy-Littlewood 极大函数	40
3.1.2 Lebesgue 微分定理	41
3.2 好核与恒同逼近	44
3.3 函数的微分	47
3.3.1 有界变差函数	47
3.3.2 Vitali 覆盖定理	52
3.3.3 绝对连续函数	57
3.4 几何上的应用	61

第1章 测度论

1.1 预备理论

定义 1.1 (开集与闭集)

称 $O \subset \mathbb{R}^d$ 为开集, 若对任意 $x \in O$, 存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x) \subset O$. 称 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为闭集, 若 E^c 为开集.

定义 1.2 (紧致集)

$\mathbb{R}^d$ 中满足 H-B 性质的集合为紧致集, 特别的, 在 $\mathbb{R}^d$ 中紧致与有界闭等价.

定义 1.3 (闭矩形)

$\mathbb{R}^d$ 中的闭矩形定义为 $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, 其中 $a_i \leq b_i$. 定义其体积

$$|R| = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i). \quad (1.1)$$

特别的, 若 $b_i - a_i = l$, 则称 R 为立方体.

引理 1.1

若矩形 $R \subset \mathbb{R}^d$ 能写成 $\mathbb{R}^d$ 中有限个矩形 $R_1, \dots, R_n$ 的无交并, 则

$$|R| = \sum_{k=1}^n |R_k|. \quad (1.2)$$

证明 考虑由 $R_1, \dots, R_j$ 生成的如下网格, 设分割后的矩形为 $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_m$, 以及无交指标集 $J_1, \dots, J_n$ 满足

$$R = \bigcup_{k=1}^m \tilde{R}_k, \quad R_k = \bigcup_{j \in J_k} \tilde{R}_j \quad (1.3)$$

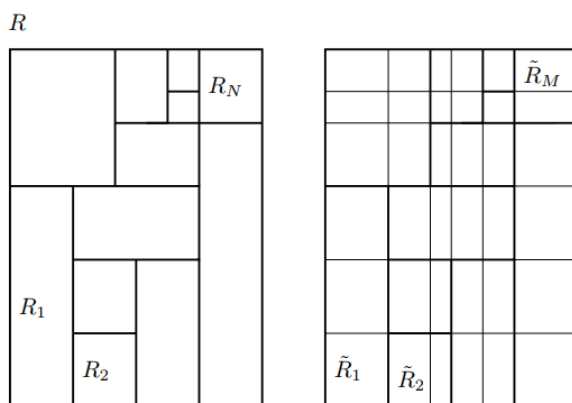


图 1.1: 矩形网格

则求和可得

$$|R| = \sum_{k=1}^m |\tilde{R}_k| = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} |\tilde{R}_j| = \sum_{k=1}^n |R_k|. \quad (1.4)$$

引理 1.2

若矩形 $R \subset \mathbb{R}^d$ 能写成 $\mathbb{R}^d$ 中有限个矩形 $R_1, \dots, R_n$ 的并, 则

$$|R| \leq \sum_{k=1}^n |R_k|. \quad (1.5)$$

定理 1.1

任意 $\mathbb{R}$ 中开集 O 都能唯一写成可数开区间的并.

证明 设 $x \in O$, 则存在 O 中开区间包含 x , 设 $I_x = (a_x, b_x)$ 为这样最大的开区间, 即

$$a_x = \inf a < x : (a, x) \subset O, \quad b_x = \sup x < b : (x, b) \subset O, \quad (1.6)$$

容易验证这样的开区间确实是最大的 (对于 O 中开区间 I 包含 x , 都有 $I \subset I_x$, 否则与 a_x, b_x 定义矛盾), 进一步也容易验证对于任意 $x, y \in O$, 必有 $I_x = I_y$ 或 $I_x \cap I_y = \emptyset$, 即定义出了等价类. 由于所有有理数是可数的, 因此可以在每个等价类中取一个有理数, 即这样的分解为可数的.

若 O 可以分别分解为一系列 I_i, I'_j 的并, 设 $I_i \cap I'_j \neq \emptyset$, 若 $I_i \neq I'_j$, 则同样会导出 a_x, b_x 定义的矛盾, 得证.

注

1. 上面的等价类实际上用到了 $\mathbb{R}$ 的拓扑性质, 每个等价类对应一个连通分支.
2. 对于闭集, 不能分解为可数无交闭集的并, 否则考虑集合

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} (r_i - \frac{1}{2^i}, r_i + \frac{1}{2^i}) \supset \mathbb{Q}, \quad (1.7)$$

若 F^c 能作分解, 则其中每个闭集均为单点集 (因为 $F^c \cap \mathbb{Q} = \emptyset$), 利用后面外测度理论可知, $0 < m_*(F) < \infty$, $m_*(F^c) = \infty$, 但可数单点集外测度为 0, 矛盾.

定理 1.2

任何开集 $O \subset \mathbb{R}^d$ 都能写成可数闭立方体 (几乎不相交, 即内部不相交) 的并.

证明 如下图所示, 依次用 2^{-n} 为边长的立方体铺满开集即可, 需要注意一点: 可数个可数并仍然可数 (这实际上是 $\mathbb{N}^2$, 仿照 $\mathbb{Q}^+$ 排列可证).

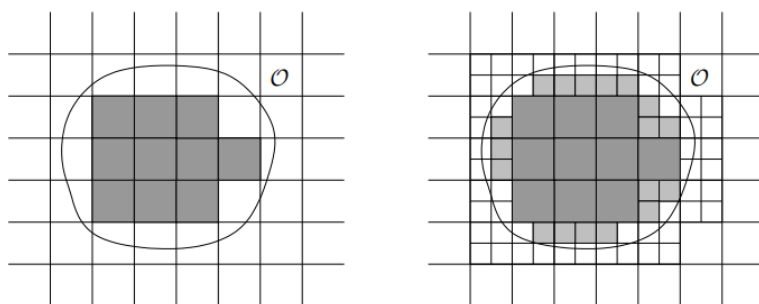


图 1.2: 铺满开集

Cantor 集

Cantor 集是实分析中的一个重要概念, 也常作为反例出现, 其构造方法是将 $[0, 1]$ 不断三分取其二, 如下图所示.

其中

$$C_0 = [0, 1] \quad (1.8)$$

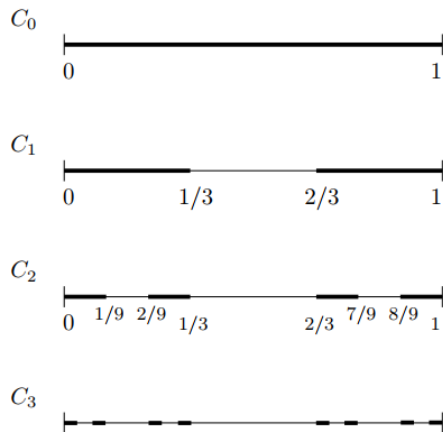


图 1.3: Cantor 集

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \quad (1.9)$$

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \quad (1.10)$$

$$\dots \quad (1.11)$$

定义 1.4 (Cantor 集)

设 $C_0, C_1, \dots$ 如上, 则定义 Cantor 集 $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.



显然有 $0, 1 \in \mathcal{C}$, 因此 Cantor 集非空, 事实上, 上面的每个分点都在 $\mathcal{C}$ 中. 下面讨论 Cantor 集的诸多性质.

命题 1.1

Cantor 集为 Lebesgue 零测集.



证明 可以看出, 每个 C_k 都是 2^k 个长度为 $1/3^k$ 的无交并, 因此计算其长度可得

$$m_*(\mathcal{C}) \leq m_*(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad (1.12)$$

令 $k \rightarrow \infty$ 可得 $m_*(\mathcal{C}) = 0$.

命题 1.2

Cantor 集为有界闭集.



证明 有界性显然, 而闭集的任意交还是闭集, 得证.

命题 1.3

Cantor 集是完全集, 即任何点都是极限点 ($\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, 或者说无孤立点).



证明 设 $x \in \mathcal{C}$, 则对任意 ε , 必定存在某一步区间的分点, 与 x 距离小于 ε , 得证.

命题 1.4

Cantor 集为不可数集.



证明 见附录中进一步讨论.

1.2 外测度

定义 1.5 (外测度)

设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则定义 E 的外测度为

$$m_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\}. \quad (1.13)$$

其中 Q_j 为闭立方体.



外测度实际上就是所有覆盖 E 的立方体面积的下确界. 容易看出, 外测度满足 $0 \leq m_* \leq \infty$, 并且任何集合都有外测度, 这是为后面讨论 Lebesgue 测度的准备.

一些例子

例 1.1 $\mathbb{R}^d$ 中至多可数集的外测度为 0.

设 $E = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^d$ 可数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 令 Q_j 为以 x_j 为中心, $\varepsilon/2^j$ 为体积的闭立方体, 则

$$m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon, \quad (1.14)$$

由 ε 任意性可得 $m_*(E) = 0$.

例 1.2 闭立方体 $R \subset \mathbb{R}^d$ 的外测度等于其体积.

由于 $R \subset R$, 因此 $m_*(R) \leq |R|$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 任意覆盖 R 的可数闭立方体组 $\{Q_j\}$, 取开立方体 $S_j \supset Q_j$, 使得 $|S_j| \leq (1 + \varepsilon)|Q_j|$, 则根据 H-B 定理, 这些 S_j 中有限个立方体覆盖 R , 因此

$$|R| \leq \sum_{j=1}^N |S_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \varepsilon) |Q_j| \quad (1.15)$$

根据 ε 的任意性可知 $|R| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$, 取下确界可得 $|R| \leq m_*(R)$, 故 $m_*(R) = |R|$.

例 1.3 开立方体 $R \subset \mathbb{R}^d$ 的外测度等于其体积.

显然有 $m_*(R) \leq |\bar{R}| = |R|$, 对任意 $0 < \varepsilon < 1$, 取闭立方体 $S \subset R$ 使得 $|S| = (1 - \varepsilon)|R|$, 则任意 R 的覆盖都覆盖 S , 因此

$$(1 - \varepsilon)|R| = |S| = m_*(S) \leq m_*(R) \quad (1.16)$$

由 ε 的任意性可得 $|R| \leq m_*(R)$.

例 1.4 矩形 $R \subset \mathbb{R}^d$ 的外测度等于其体积.

仿照由闭立方体外测度的证明 (扩张 + H-B), 可得 $|R| \leq m_*(R)$, 反过来, 对任意边长为 $1/k$ 的立方体覆盖 Q_j , 设 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ 分别表示包含在 R 内、与 ∂R 有交的矩形集合, 则

$$\sum_{Q_j \in \mathcal{Q}} |Q_j| \leq |R|, \quad \sum_{Q_j \in \mathcal{Q}'} |Q_j| = k^{-d} O(k^{d-1}) = O(k^{-1}) \quad (1.17)$$

后者成立是因为 R 表面为 $d-1$ 维, 因此

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq |R| + O(1/k). \quad (1.18)$$

由 k 的任意性可得 $m_*(R) \leq |R|$, 得证.

例 1.5 $\mathbb{R}^d$ 的外测度为 ∞ .

外测度的性质

根据外测度的定义, 可以给出如下引理, 这将为后面的一些证明提供便利.

引理 1.3

设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在覆盖 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_*(Q_i) \leq m_*(E) + \varepsilon. \quad (1.19)$$

**命题 1.5 (单调性)**

设 $E_1 \subset E_2$, 则 $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.



证明 E_2 的任何覆盖都是 E_1 的覆盖.

命题 1.6 (可数次可加性)

若 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 则 $m_*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(E_i)$.



证明 不妨设 $m_*(E_j) < \infty$, 取覆盖 $E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,j}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad (1.20)$$

则所有的 $Q_{k,j}$ 构成了 E 的一个覆盖, 因此

$$m_*(E) \leq \sum_{k,j} |Q_{k,j}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) + \varepsilon \quad (1.21)$$

根据 ε 的任意性得证.

下面的命题表明, 外测度可以用任意更大的开集进行逼近.

定理 1.3

设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 则 $m_*(E) = \inf\{m_*(O) : E \subset O\}$, 其中 O 为开集.



证明 显然有 $m_*(E) \leq \inf\{m_*(O) : E \subset O\}$ (单调性). 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, 并且

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| \leq m_*(E) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1.22)$$

再取开立方体 $Q_j^0 \supset Q_j$, 并且 $|Q_j^0| \leq |Q_j| + \varepsilon/2^{j+1}$, 则开集 $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^0$ 覆盖 E , 并且

$$\inf\{m_*(O) : E \subset O\} \leq m_*(O) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^0| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| + \frac{\varepsilon}{2} \leq m_*(E) + \varepsilon, \quad (1.23)$$

根据 ε 任意性得证.

命题 1.7

设 $E = E_1 \sqcup E_2$, $d(E_1, E_2) > 0$, 则 $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.



证明 显然 $m_*(E) \leq m_*(E_1) + m_*(E_2)$. 设 $d(E_1, E_2) > \delta > 0$, 则取边长小于 δ 的立方体覆盖 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \varepsilon \quad (1.24)$$

则存在无交指标集 $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$, 使得

$$E_1 \subset \bigcup_{j \in J_1} Q_j, \quad E_2 \subset \bigcup_{j \in J_2} Q_j \quad (1.25)$$

因此

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \varepsilon \quad (1.26)$$

由 ε 任意性得证.

命题 1.8

设 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, 其中 Q_j 为几乎不相交的立方体 (内部不相交), 则 $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)$.



证明 显然 $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)$; 对任意 $\varepsilon > 0$, 设 $\tilde{Q}_j$ 严格包含在 Q_j 中, 且满足 $|Q_j| \leq |\tilde{Q}_j| + \varepsilon/2^j$, 则对任意 N , $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N$ 两两无交, 因此

$$\sum_{k=1}^N |Q_k| \leq \sum_{k=1}^N m_*(\tilde{Q}_k) + \varepsilon = m_*\left(\bigcup_{k=1}^N \tilde{Q}_k\right) + \varepsilon \leq m_*(E) + \varepsilon. \quad (1.27)$$

令 $N \rightarrow \infty$, 根据 ε 任意性得证.

上面的结果说明, 若集合可以划分为几乎不相交的立方体的可数并, 则其外测度就是这些立方体外测度之和. 但根据上一节中的结论, 任何开集都可以做这种分割, 因此这与我们的直觉相符. 此外, 该性质也说明了外测度与这种立方体分割的选取无关.

需要注意, 外测度并不能得到 “若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 则 $m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$ ”, 这是 Lebesgue 测度的良好性质之一.

1.3 可测集与 Lebesgue 测度

可测性实际上是挑选出了一些具有良好性质的集合 (比如可数可加性), 可测性也有许多等价的定义.

定义 1.6 (Lebesgue 测度)

设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset E$, 使得

$$m_*(O - E) \leq \varepsilon, \quad (1.28)$$

则称 E 是 Lebesgue 可测的, 此时定义 E 的 Lebesgue 测度 $m(E) = m_*(E)$.



注 显然地, Lebesgue 测度满足外测度的一切性质.

下面考虑 Lebesgue 测度的一些简单性质.

命题 1.9

任何 $\mathbb{R}^d$ 中的开集都是可测集.



证明 取 $O = E$ 得证.

命题 1.10

若 $m_*(E) = 0$, 则 E 以及其子集 F 均可测.



证明 由于 $0 = m_*(E) = \inf m_*(O)$, $O \supset E$, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 O 使得 $m_*(O - E) \leq m_*(O) \leq \varepsilon$, 得证. 对于 $F \subset E$ 同理.

命题 1.11

可测集的可数并仍然可测.



证明 设 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中 E_j 可测, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 O_j 使得 $m_*(O_j - E_j) \leq \varepsilon/2^j$, 令 $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$, 则 $(O - E) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (O_j - E_j)$, $m_*(O - E) \leq \varepsilon$, 得证.

命题 1.12

任何 $\mathbb{R}^d$ 中的闭集都是可测集.



证明 考虑闭球 $B_k = B(0, k)$, 则任何闭集 F 可以表示为可数紧集的并

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F \cap B_k, \quad (1.29)$$

因此只需要证明紧集可测. 设 F 为紧集, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset F$ 使得 $m_*(O) \leq m_*(F) + \varepsilon$, 由于 F 闭, $O - F$ 开, 根据定理 1.2 可知 $O - F = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, 其中 Q_j 为几乎不相交的闭立方体, 因此对固定的 N , $K_N = \bigcup_{j=1}^N Q_j \subset O - F$ 为紧集, 从而 $d(K_N, F) > 0$, $K \cup F \subset O$, 因此

$$m_*(O) \geq m_*(K_N \cup F) = m_*(F) + m_*(K_N) = m_*(F) + \sum_{j=1}^N m_*(Q_j), \quad (1.30)$$

$$\sum_{j=1}^N m_*(Q_j) \leq m_*(O) - m_*(F) \leq \varepsilon, \quad (1.31)$$

令 $N \rightarrow \infty$ 即得 $m_*(O - F) \leq \varepsilon$, 故 F 可测.

注 上面之所以先将问题化归到紧集的形式, 是为了保证其有界性.

上面的证明中略去了一个易证的引理

引理 1.4

设 F, K 分别为闭集与紧集, 且二者无交, 则 $d(F, K) > 0$.

命题 1.13

可测集的补集也是可测的.

证明 设 E 可测, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在开集 $O_n \supset E$ 使得 $m_*(O_n - E) \leq 1/n$, 设 $S = (\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c$, 则 $S \subset E^c$, 显然 S 可测 (闭集的可数并), 下证 $E^c - S$ 可测以说明 $E^c = S \cup (E^c - S)$ 可测, 由于

$$(E^c - S) = (S^c - E) \subset (O_n - E), \quad (1.32)$$

因此对任意 n 都有 $m_*(E^c - S) \leq 1/n$, 故 $m_*(E^c - S) = 0$, $E^c - S$ 零测 (可测), 得证.

由上述性质以及 De Morgan 律, 很容易得到另一个性质

命题 1.14

可测集的可数交也是可测的.

Lebesgue 测度的更多性质

Lebesgue 测度一个非常良好的性质就是可数可加性, 即如下定理.

定理 1.4 (可数可加性)

设 $E_1, E_2, \dots$ 为无交可测集, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 则

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j). \quad (1.33)$$

证明 Step 1. 假设每个 E_j 都有界. 由 E_j^c 可测的证明过程可知对任意 j , 存在闭集 $F_j \subset E_j$ 使得 $m_*(E_j - F_j) \leq \varepsilon/2^j$. 对任意 N , $F_1, \dots, F_N$ 为无交紧集且均在 E 中, 因此

$$\sum_{j=1}^N m(E_j) \leq \sum_{j=1}^N m(F_j) + \sum_{j=1}^N m(E_j - F_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^N F_j\right) + \sum_{j=1}^N m(E_j - F_j) \leq m(E) + \varepsilon, \quad (1.34)$$

令 $N \rightarrow \infty$, 再由 ε 的任意性可知

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j). \quad (1.35)$$

另一边根据外测度的可数次可加性易得.

Step 2. 考虑一般情形. 取一系列单调递增至无穷的立方体 $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$, 且令 $S_1 = Q_1, S_k = Q_k - Q_{k-1}$, 则 S_k 都有界无交. 定义可测集 $E_{j,k} = E_j \cap S_k$, 则 $E = \bigcup_{j,k} E_{j,k}$, 其中 $E_{j,k}$ 有界且无交, 并且 $E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$ 也为无交并, 因此

$$m(E) = \sum_{j,k} m(E_{j,k}) = \sum_j \sum_k m(E_{j,k}) = \sum_j m(E_j). \quad (1.36)$$

得证.

下面考虑一种特殊集合的极限.

定义 1.7 (单调集合的极限)

设集族 $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ 满足 $E_k \subset E_{k+1}$, 则定义 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \nearrow E$.

设集族 $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ 满足 $E_k \supset E_{k+1}$, 则定义 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \searrow E$.



推论 1.1

设集族 $\{E_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^d$, 则

1. 若 $E_k \nearrow E$, 则 $m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$.
2. 若 $E_k \searrow E$ 且 $m(E_k) < \infty$, 则 $m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$.



注 考虑反例: 若 $E_k = B_k(0)^c$, 则 $E_k \searrow \emptyset$, 但是 $m(E_k) = \infty$.

证明

1. 约定 $E_0 = \emptyset$, 则

$$m(E) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k - E_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k - E_{k-1}) \quad (1.37)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [m(E_k) - m(E_{k-1})] = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k). \quad (1.38)$$

2. 由于 $E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k - E_{k+1})$, 因此

$$m(E_1) = m(E) + \sum_{k=1}^{\infty} [m(E_k) - m(E_{k+1})] = m(E) + m(E_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k), \quad (1.39)$$

得证.

在前文的证明中, 用到了许多开集、闭集逼近某个可测集, 如下定理则总结了此类性质.

定理 1.5

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, 则对任意 $\varepsilon > 0$:

1. 存在开集 $O \supset E$ 使得 $m(O - E) \leq \varepsilon$.
2. 存在闭集 $F \subset E$ 使得 $m(E - F) \leq \varepsilon$.
3. 若 $m(E) < \infty$, 则存在紧集 $K \subset E$ 使得 $m(E - K) \leq \varepsilon$.
4. 若 $m(E) < \infty$, 则存在闭矩形的有限交 $F = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ 使得 $m(E \Delta F) \leq \varepsilon$, 其中 $E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$ 称对称差.



证明

1. 可测的定义.

2. 由于 E^c 可测, 因此存在开集 $O \supset E^c$ 使得 $m(O - E^c) \leq \varepsilon$, 若取闭集 $F = O^c \subset E$ 则

$$E - F = E - O^c = O - E^c, \quad m(E - F) = m(O - E^c) \leq \varepsilon. \quad (1.40)$$

3. 取闭集 $F \subset E$ 使得 $m(E - F) \leq \varepsilon/2$, 令 $B_n = B(0, n)$, $K_n = F \cap B_n$, 则 $(E - K_n) \searrow (E - F)$, 根据 $m(E) < \infty$ 可得当 n 充分大时有 $m(E - K_n) \leq \varepsilon$.

4. 取一族闭立方体 $\{Q_j : j \in \mathbb{N}\}$ 使得

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m(E) + \varepsilon/2, \quad (1.41)$$

由于 $m(E) < \infty$, 因此存在 $N > 0$ 使得 $\sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \varepsilon/2$, 设 $F = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ 则

$$m(E \Delta F) = m(E - F) + m(F - E) \quad (1.42)$$

$$\leq m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^N Q_j - E\right) \quad (1.43)$$

$$\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| + \sum_{j=1}^N |Q_j| - m(E) \quad (1.44)$$

$$\leq \varepsilon. \quad (1.45)$$

除此之外, 可测集还有一些几何上的性质, 比如

$$m(E + h) = m(E), \quad m(\delta E) = \delta^d m(E), \quad (1.46)$$

其中

$$E + h := \{x \in E : x + h\}, \quad \delta E := \{x \in E : \delta x\}. \quad (1.47)$$

最后以定理的形式给出一个可测的等价定义.

定理 1.6 (Caratheodory)

集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测当且仅当对任意 $A \subset \mathbb{R}^d$ 有

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A - E), \quad (1.48)$$

上式称为 Caratheodory 条件.



证明 若 E 满足 Caratheodory 条件, 则取开集 $A = O \supset E$ 可得

$$m_*(O - E) = m_*(O) - m_*(E), \quad (1.49)$$

由于 $m_*(E) = \inf\{m_*(O) : E \subset O\}$, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $O \supset E$ 使得

$$m_*(O - E) = m_*(O) - m_*(E) \leq \varepsilon, \quad (1.50)$$

故 E 可测.

再假设 E 可测, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset E$ 使得 $m_*(O - E) \leq \varepsilon$, 对于任意 $A \subset \mathbb{R}^d$, 只需证明

$$m_*(A) \geq m_*(A \cap E) + m_*(A - E), \quad (1.51)$$

注意到 Caratheodory 条件对 A 可测的情形显然成立, 因此考虑开集 $O \supset A$, 则有

$$m_*(O) = m_*(O \cap E) + m_*(O - E) \quad (1.52)$$

$$\geq m_*(A \cap E) + m_*(A - E), \quad (1.53)$$

对左边取下确界得证.

1.3.1 σ -代数与 Borel 集**定义 1.8 (σ -代数)**

设集族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 包含 $\emptyset$, 且对补集、可数交封闭, 则称 $\mathcal{A}$ 为一个 σ -代数.



$\mathbb{R}^d$ 中最小的 σ -代数为 $\{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$, 最大的 σ -代数为 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. 而 $\mathbb{R}^d$ 中所有可测集也构成了一个 σ -代数. 另一种重要的 σ -代数被称为 Borel σ -代数:

定义 1.9 (Borel 集)

定义 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中所有开集生成的 σ -代数, 则称其中元素为 Borel 集.



由于所有开集都可测, 因此 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 包含在所有可测集构成的 σ -代数中, 反之不然, 可以找到一个可测集, 不是 Borel 集.

通过将 Borel 集 “完备化”, 即添加 $\{E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : m(E) = 0\}$, 可以得到 Lebesgue 集.

定义 1.10 (Lebesgue 集)

称 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cup \{E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : m(E) = 0\}$ 为 Lebesgue 集, 即 Borel 集的完备化.

**定义 1.11 (G_δ 集与 F_σ 集)**

称开集的可数交为 G_δ 集, 闭集的可数并为 F_σ 集.



例 1.6 $\mathbb{Q}$ 为 F_σ 集, 因此 $\mathbb{Q}^c$ 为 G_δ 集; 同时, $\mathbb{Q}$ 不是一个 G_δ 集, 若不然, 则 $\mathbb{Q}^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 F_δ 集, 并且其中每个集合都没有内点 (否则根据有理数的稠密性可知某个集合必有有理数), 根据 Baire 纲定理可知 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 也无内点, 矛盾.

上面的例子也可以说明: 不存在只在有理点连续的函数.

例 1.7 设 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, 设 E 为 f 连续点的集合, 则 E 为 G_δ 集.

定义

$$U_n = \{x \in \mathbb{R}^d : \exists \delta > 0, \sup_{y, z \in B_\delta(x)} |f(y) - f(z)| < 1/n\}, \quad (1.54)$$

则 U_n 为开集 (对任意 $x \in U_n$, 取比 δ 更小的球, 则球中点均在 U_n 中), 进一步有

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n, \quad (1.55)$$

即 E 为 G_δ 集.

推论 1.2

集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测

1. 当且仅当 E 与一个 G_δ 集相差一个零测集.
2. 当且仅当 E 与一个 F_σ 集相差一个零测集.



证明 若 E 满足任意一个条件, 则其显然可测; 假设 E 可测, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在开集 $O_n \supset E$, 使得 $m(O_n - E) \leq 1/n$, 则 $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ 为一个包含 E 的 G_δ 集, 并且 $(S - E) \subset (O_n - E)$, 因此对任意 n 都有

$$m(S - E) \leq m(O_n - E) \leq 1/n, \quad (1.56)$$

故 $m(S - E)$ 零测.

另外, 也存在闭集 $F_n \subset E$, 使得 $m(E - F_n) \leq 1/n$, 因此 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 为包含在 E 中的闭集且 $(E - F) \subset (E - F_n)$, 因此

$$m(E - F) \leq m(E - F_n) \leq 1/n \quad (1.57)$$

关于 Borel 集, 还有一些性质.

引理 1.5

设 χ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的 σ -代数, 函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, 若对任意开集 $U \subset \mathbb{R}$ 有 $f^{-1}(U) \in \chi$, 则对任意 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 有 $f^{-1}(E) \in \chi$.



证明 令

$$\chi_1 = \{E \subset \mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \chi\}, \quad (1.58)$$

则 χ_1 也是一个 σ -代数, 并且包含 $\mathbb{R}$ 中所有开集, 因此 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \chi_1$, 得证.

这一定程度上反映了 Borel 集的表现可以由开集决定 (毕竟根据定义, Borel 集由开集生成),

推论 1.3

若 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $\chi = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 则对任意 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 有 $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.



但是反过来, 若函数 f 使得 Borel 集的原像还是 Borel 集, 并不能保证 f 的连续性, 比如考虑 Dirichlet 函数 (或者某个示性函数).

1.3.2 不可测集的例子

下面构造一个集合, 并证明它不可测.

考虑 $[0, 1]$ 上的等价关系 (不难验证): $x \sim y$ 当且仅当 $x - y \in \mathbb{Q}$, 则 $[0, 1]$ 被划分为等价类的无交并

$$[0, 1] = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \quad (1.59)$$

借助**选择公理**, 从每个等价类中选出一个代表元 x_{α} 构成集合 $\mathcal{N}$, 这就构造出了 **Vitalie 集**.

定理 1.7

Vitalie 集 $\mathcal{N}$ 是不可测的.



证明 假设 $\mathcal{N}$ 可测, 设 $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ 为 $[-1, 1]$ 上的所有有理数, 则平移后的集合 $\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$ 也可测, 并且 $m(\mathcal{N}) = m(\mathcal{N}_k)$,

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k \subset [-1, 2] \quad (1.60)$$

断言 $\mathcal{N}_k$ 两两无交, 否则若 $x_{\alpha} + r_k = x_{\beta} + r_l$, 则 $x_{\alpha} \sim x_{\beta}$, 与 $\mathcal{N}$ 只包含每个等价类的一个元素矛盾. 因此由可数可加性得

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}_k) \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}) \leq 3 \quad (1.61)$$

无论 $m(\mathcal{N})$ 为何值都矛盾.

¶ 选择公理

构造 Vitalie 集时用到了**选择公理**, 它看似十分显然

公理 1.1 (选择公理)

设 E 为集合, $\{E_{\alpha}\}$ 为 E 的非空子集, 则存在选择函数 $f: \alpha \mapsto x_{\alpha} \in E_{\alpha}$.



注 换句话说, 选择公理保证了我们可以从一系列集合中选出一个代表元.

选择公理在许多数学证明中都有使用, 比如证明**良序原理**.

定义 1.12 (全序集)

集合 E 称为全序的, 若其满足

1. 对任意 x 有 $x \leq x$.
2. 对任意不同的 $x, y \in E$, 有且仅有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 中一者成立.
3. 若 $x \leq y, y \leq z$, 则 $x \leq z$.



我们称 E 为良序的, 若其中存在一个全序关系, 且任何子集 $A \subset E$ 中都有最小元, 即存在 $x_0 \in A$ 使得对任意 $x \in A$ 都有 $x_0 \leq x$. 一个简单良序集的例子是 $\mathbb{Z}_+$, 而 $\mathbb{R}_+$ 在通常意义的序关系下不是良序的, 但根据良序原理, 其中也能找到新的序关系使之“良序化”.

定理 1.8 (良序原理)

任何集合可以被“良序化”.



显然良序原理蕴含选择公理: 从任何子集中都可以选出那个最小元; 但反之亦然.

定理 1.9

选择公理蕴含良序原理.

**证明**

在大多情况下, 我们承认选择公理, 进而承认良序原理.

1.4 可测函数

在可测集的基础上, 进一步考虑积分理论的一大重点: 可测函数.

1.4.1 可测函数及基本性质

本节考虑扩充实数系, 即 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 则任何函数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 都满足

$$-\infty \leq f(x) \leq \infty, \quad (1.62)$$

不过大多情况下, $f^{-1}(\infty)$ 为零测集. 称 f 为**有限值 (finite-valued)** 的, 当且仅当对任意 x 有 $-\infty < f(x) < \infty$.

定义 1.13 (可测函数)

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 集合

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\} \quad (1.63)$$

也是可测集, 则称 f 为可测函数.



注 简便起见, $\{x \in E : f(x) < a\}$ 可简写为 $\{f < a\}$.

借助一些小技巧¹, 可以得到一些可测函数的等价定义², 若记 $\{f \leq a\} = \{x \in E : f(x) \leq a\}$, 则

$$\{f < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \leq a - 1/k\}, \quad \{f \geq a\} = \{f < a\}^c \quad (1.64)$$

$$\{f \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < a + 1/k\}, \quad \{f > a\} = \{f \leq a\}^c, \quad (1.65)$$

¹这里的小技巧非常重要, 在实分析中具体刻画满足某些性质的集合时常用, 其归根为两条: 右开边可由右闭内逼近, 右闭边可由右开外逼近 (左侧同理)

²这里有些小问题, 忽略了取无穷值的集合, 但是当 f 几乎处处有限时是正确的.

也就是说 $\{f < a\}, \{f \leq a\}, \{f > a\}, \{f \geq a\}$ 四个集合的可测性是等价的, 进一步, 对

$$\{a < f < b\} = \{f < b\} - \{f \geq a\} \quad (1.66)$$

等四个集合也有同样结论. 事实上, 可测函数还可作如下更一般的定义:

命题 1.15

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 为可测函数, 当且仅当对任意开集 $E \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(E)$ 可测.



证明 只需证明若 f 可测, 则 $f^{-1}(E)$ 可测, 根据 $\mathbb{R}$ 中开集的结构定理, $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, 因此

$$f^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((a_i, b_i)), \quad (1.67)$$

根据可测函数的等价刻画, 得证.

借助 $\mathbb{R}$ 的一些拓扑性质, 可以得到如下命题.

命题 1.16

有限值函数 f 可测, 当且仅当任意开集 O 的原像 $f^{-1}(O)$ 可测, 也当且仅当任意闭集 F 的原像 $f^{-1}(F)$ 可测.



推论 1.4

若 f 为 $\mathbb{R}^d$ 中的连续函数, 则 f 可测且有限值, 并且若 Φ 也连续, 则 $\Phi \circ f$ 也可测.



证明 注意到对于连续函数, 开集/闭集的原像仍为开集/闭集.

命题 1.17

设 $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$ 为一列可测函数, 则

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (1.68)$$

都是可测的.



证明 只需注意到

$$\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\}, \quad \{\inf_n f_n > a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\}, \quad (1.69)$$

以及

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_k \{\sup_{n \geq k} f_n\}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_k \{\inf_{n \geq k} f_n\}, \quad (1.70)$$

即得.

推论 1.5

设 $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$ 为一列可测函数且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, 则 f 也是可测的.



证明 只需注意到极限存在当且仅当上极限等于下极限即得.

命题 1.18

设 f, g 为可测函数, 则

1. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, f^k 都可测.
2. 若 f, g 都是有限值的, 则 $f + g, fg$ 都可测.



证明

1. 注意到

$$\{f^k > a\} = \begin{cases} \{f > a^{1/k}\}, & 2 \nmid k \\ \{f > a^{1/k}\}, & a \geq 0, 2|k \end{cases} \quad (1.71)$$

或者将 f^k 看作连续函数 $\Phi(x) = x^k$ 与 f 的复合也可证 (其实这种思路更好些)。

2. 断言:

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f > a - r\} \cap \{g > r\}, \quad (1.72)$$

左边包含右边是显然的, 假设 $x \in \{f + g > a\}$, 由于 g 取有限值, 因此必然存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $g(x) > r$ 且 $|g(x) - r|$ 非常小, 使得同时有 $f(x) + r > a$, 即 $f(x) > a - r$, 故右边包含左边。

另一方面有

$$fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2], \quad (1.73)$$

即得 fg 可测。

定义 1.14 (几乎处处相等)

称 f, g 在 E 上几乎处处相等, 若集合 $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ 为零测集, 简记为 $f = g, a.e.$



注 上述定义赋予了“几乎处处”的严谨定义, 这一短语可以推广: 称某一陈述“几乎处处”正确, 若其仅在某个零测集上不成立。

不难验证, 几乎处处相等是一个等价关系 (并且这种等价性在函数的加法与乘法下是良定的), 这种等价关系可以传递一些性质, 不难验证:

命题 1.19

若 f 可测, $g = f, a.e.$, 则 g 也可测; 若 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 可测, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), a.e.$, 则 f 也可测。



1.4.2 由阶梯函数与简单函数逼近

本节进一步讨论可测函数的性质, 一个重要的结果是它被一系列较好的函数逼近。

定义 1.15 (示性函数)

对于集合 $E \subset \mathbb{R}^d$, 定义示性函数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases} \quad (1.74)$$



借助示性函数, 可以描述 $\mathbb{R}$ 中考虑过的“阶梯函数”, 并将其推广到 $\mathbb{R}^d$ 。

定义 1.16 (阶梯函数)

定义 $\mathbb{R}^d$ 中的阶梯函数为

$$f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{R_k}, \quad (1.75)$$

其中 R_k 为 $\mathbb{R}^d$ 中的矩形, $a_k \in \mathbb{R}$ 。



上面的定义可以推广, 若设 $E_1, \dots, E_k$ 为可测集, 则称函数

$$f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k} \quad (1.76)$$

为“简单函数” (simple function)。

定理 1.10

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的非负可测函数, 则存在递增的简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 收敛到 f , 即

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x). \quad (1.77)$$



证明 设 Q_N 为以原点为中心, 边长为 N 的立方体, 则考虑截断函数

$$F_N(x) = \min\{N, f\chi_{Q_N}\} = \begin{cases} f(x), & x \in Q_N, f(x) \leq N \\ N, & x \in Q_N, f(x) > N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.78)$$

易知 $F_N(x) \rightarrow f(x)$, 再将 Q_N 作如下划分

$$E_{k,M} = \{x \in Q_N : k/M < F_N \leq (k+1)/M\}, \quad 0 \leq k < MN \quad (1.79)$$

由此可知 $0 \leq F_N(x) - (k/M)\chi_{E_{k,M}} \leq 1/M$, 因此若构造简单函数

$$F_{N,M}(x) = \sum_{k=0}^{MN} \frac{k}{M} \chi_{E_{k,M}}(x), \quad (1.80)$$

则对任意 x 都有 $0 \leq F_N(x) - F_{N,M}(x) \leq 1/M$. 再令 $\varphi_N(x) = F_{N,2N}$, 就有 $0 \leq F_N(x) - \varphi_N(x) \leq 1/N$, 因此 φ_N 收敛到 f (递增是显然的).

上述证明中的 $E_{k,M}$ 实际上是分割了值域, 这与 Lebesgue 积分的想法类似.

上面的逼近对非负可测迈出了第一步, 下面将此推广到一般可测函数中.

定理 1.11

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}$, 使得

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)|, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x). \quad (1.81)$$

特别地, 有 $|\varphi_k(x)| \leq |f(x)|$.



证明 作分解 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, 其中

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \quad (1.82)$$

则 f^+, f^- 均为非负可测函数, 因此存在非负简单函数 $\{\varphi_k^+\}, \{\varphi_k^-\}$ 分别递增收敛到 f^+, f^- , 将其组合为 $\varphi_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-$, 则显然 φ_k 收敛到 f , 并且 $|\varphi_k| = \varphi_k^+ + \varphi_k^-$, 因此 $|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)|$, 得证.

下面考虑进一步的结果, 即利用性质更好的函数: 阶梯函数进行逼近. 证明分为两部分, 首先证明简单函数 (或者说示性函数) 可被阶梯函数逼近, 再证明可测函数可以被阶梯函数逼近 (需要用到 Egorov 定理).

定理 1.12

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数, 则存在一系列阶梯函数 $\{\psi_k\}$ 几乎处处收敛到 f .



证明 首先证明定理对每个 $f = \chi_E$ (E 为可测集) 成立. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在立方体 $Q_1, \dots, Q_N$ 使得

$$m(E \triangle \bigcup_{j=1}^N Q_j) \leq 2\varepsilon, \quad (1.83)$$

若将这些立方体扩展为网格, 则存在几乎无交的闭矩形 $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_M$ 使得 $\bigcup_{j=1}^N Q_j = \bigcup_{j=1}^M \tilde{R}_j$, 若取这些矩形的内部 $R_j \subset \tilde{R}_j$, 则 $m(E \triangle \bigcup_{j=1}^M R_j) \leq 2\varepsilon$, 因此对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在阶梯函数 ψ_k 使得集合 $E_k = \{f \neq \psi_k\}$ 满足 $m(E_k) \leq 2^{-k}$, 若取

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} E_j, \quad (1.84)$$

则 $m(F) = 0$ (可以直接算, 似乎也可以用 Borel-Cantelli 引理), 也就是说在零测集 F 外均有 $\psi_k \rightarrow f$, 即几乎处处收敛.

对于一般的可测函数 f , 存在简单函数列 $\{\psi_k\}$ 逐点收敛到 f , 对于每个 ψ_k , 存在阶梯函数 $\varphi_{k,i}$ 几乎处处收敛到 ψ_k . 由于 $m(\text{supp } \psi_k) < \infty$, 根据 Egorov 定理, 存在可测集 $E_k \subset \text{supp } \psi_k$ 满足 $m(E_k) \leq 2^{-k}$, 且在 E_k^c 中 $\varphi_{k,i} \rightrightarrows \psi_k$, 因此存在 i_k , 使得在 E_k^c 中一致成立

$$|\varphi_{k,i_k} - \psi_k| < \frac{1}{k}, \quad (1.85)$$

考虑

$$E = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j, \quad (1.86)$$

则 $m(E) = 0$, 并且在 E^c 中有 $\varphi_{k,i_k} \rightarrow f$, 重新记 φ_{k,i_k} 为 φ_k , 则 φ_k 几乎处处收敛到 f .

1.4.3 Littlewood 三原理

前面讨论的可测集与可测函数带来了一些新的理论, 这些新理论与过去我们熟悉的对象之间存在一些值得讨论的联系, Littlewood 曾给出如下三条原理

1. 每个可测集都近乎区间的有限并.
2. 每个可测函数都近乎连续.
3. 每个收敛可测函数列都近乎一致收敛.

其中使用了“近乎”这样模糊的短语, 需要对此进行更严格地表述. 注意到其中第一条实际上就是定理 1.5 的 4, 而其余二者分别由下面两定理给出.

首先考虑一个引理, 这是几乎处处收敛的等价定义, 或者说更细致的刻画.

引理 1.6

设 f_n, f 为可测函数, E 为可测集, 定义

$$E_n(\varepsilon) = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \quad (1.87)$$

则 f_n 在 E 上几乎处处收敛到 f 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$,

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(\varepsilon)) = 0. \quad (1.88)$$

证明 定义

$$N = \{x \in E : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}, \quad (1.89)$$

则 $f_n \rightarrow f, a.e.$ 当且仅当 $m(N) = 0$, 断言

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(1/k). \quad (1.90)$$

对任意 $x \in N$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 子列 $\{n_i\}$ 使得 $x \in E_{n_i}(\varepsilon_0)$, 也即 $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(\varepsilon_0)$, 因此 N 包含于右边.

反过来, 若 $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(1/k)$, 则存在子列 $\{n_i\}$ 使得 $x \in E_{n_i}(1/k)$, 即

$$|f_{n_i}(x) - f(x)| \geq 1/k, \quad (1.91)$$

因此在 x 处 $f_n \not\rightarrow f$, 即 $x \in N$, 可知 N 包含右边, 得证.

定理 1.13 (Egorov)

设 $\{f_k\}$ 为可测集 $m(E) < \infty$ 上的一列可测函数, 且在 E 中 $f_k \rightarrow f, a.e.$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$ 使得 $m(E - A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ 且在 A_ε 中 $f_k \rightrightarrows f$.

证明 [课上的证法] 根据条件可知对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n(\varepsilon)) = 0 \iff \lim_{i \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=i}^{\infty} E_n(\varepsilon)\right) = 0, \quad (1.92)$$

考虑该集合的补集, 可得

$$x \in \bigcap_{n=i}^{\infty} (E_n(\varepsilon))^c \iff \forall n \geq i: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (1.93)$$

对任意 $\varepsilon_0 > 0$, $k \geq 1$, 取 i_k 使得

$$m(F_k) := m\left(\bigcup_{n=i_k}^{\infty} E_n(1/k)\right) \leq \varepsilon_0/2^{k+1}, \quad (1.94)$$

则对任意 $x \in F_k^c$, $n \geq i_k$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$, 定义

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \quad m(F) \leq \varepsilon_0/2, \quad (1.95)$$

则对任意 $k \geq 1$, 取上面的 i_k 可使得对任意 $n \geq i_k$, $x \in F^c \subset F_k^c$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| < 1/k, \quad (1.96)$$

因此 f_n 在 F^c 中一致收敛到 f , 再取 F 中的一个测度差小于 $\varepsilon_0/2$ 的闭集 F_{ε_0} , 即得证.

证明 [Stein 中的证法] 不妨设在 E 中有 $f_k \rightarrow f$ (否则用符合条件的 E' 替换 E), 定义

$$E_k^n = \{x \in E: |f_j(x) - f(x)| < 1/n, \forall j > k\} \quad (1.97)$$

$$= \bigcap_{j=k+1}^{\infty} \{x \in E: |f_j(x) - f(x)| < 1/n\}, \quad (1.98)$$

则 E_k^n 关于 k 单调递增收敛到 E , 因此存在 $k_n \in \mathbb{N}$ 使得 $m(E - E_{k_n}^n) < 1/2^n$, 并且对任意 $j > k_n$ 有

$$\|f_j - f\|_{E_{k_n}^n} < 1/n, \quad (1.99)$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 取 N 使得 $\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$, 再令 $\tilde{A}_\varepsilon = \bigcap_{n \geq N} E_{k_n}^n$, 则

$$m(E - \tilde{A}_\varepsilon) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E - E_{k_n}^n) < \varepsilon/2, \quad (1.100)$$

对于任意 $\delta > 0$, 取 $n \geq N$ 且 $1/n < \delta$, 则对任意 $j > k_n$ 都有

$$\|f_j - f\|_{\tilde{A}_\varepsilon} \leq \|f_j - f\|_{E_{k_n}^n} < 1/n < \delta, \quad (1.101)$$

故在 $\tilde{A}_\varepsilon$ 中 $f_k \Rightarrow f$, 在 $\tilde{A}_\varepsilon$ 中取闭集 A_ε , 使得 $m(\tilde{A}_\varepsilon - A_\varepsilon) < \varepsilon/2$, 即得证.

定理 1.14 (Lusin)

设 f 为定义在 E 上的有限值可测函数, $m(E) < \infty$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$, $m(E - F_\varepsilon) \leq \varepsilon$, 使得 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续. 

证明 [课上的证法] 取阶梯函数列 $f_n \rightarrow f, a.e.$, 根据 Egorov 定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $A \subset E$, $m(A^c) \leq \varepsilon/2$, 并且在 A 中 $f_n \Rightarrow f$. 再根据阶梯函数的性质, 对每个 f_n , 存在零测集 $E_n \subset E$ 使得 f_n 在 E_n^c 连续, 令

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m(F) = 0, \quad (1.102)$$

则 $\{f_n|_{F^c}\}$ 为连续函数列, 其在 $A \cap F^c$ 的一致极限 $f|_{F^c}$ 在 $A \cap F^c$ 中连续, 最后取闭集 $F_\varepsilon \subset A \cap F^c$ 满足 $m((A \cap F^c) - F_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$, 则

$$m(E - F_\varepsilon) = m((E - (A \cap F^c)) \cup ((A \cap F^c) - F_\varepsilon)) \quad (1.103)$$

$$\leq m(E - (A \cap F^c)) + m((A \cap F^c) - F_\varepsilon) \quad (1.104)$$

$$\leq \varepsilon, \quad (1.105)$$

得证.

证明 [Stein 中的证法] 设阶梯函数列 $f_n \rightarrow f, a.e.$, 则存在集合 E_n , $m(E_n) < 1/2^n$, 使得 f_n 在 E_n 外连续, 根据 Egorov 定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在集合 $A_{\varepsilon/3}$ 使得在其中 $f_n \rightarrow f$, 并且 $m(E - A_{\varepsilon/3}) \leq \varepsilon/3$.

取充分大的 N 使得 $\sum_{n \geq N} 2^{-n} < \varepsilon/3$, 考虑集合

$$F' = A_{\varepsilon/3} - \bigcup_{n \geq N} E_n, \quad (1.106)$$

则 $\{f_n\}$ 在 F' 连续, 其一致极限 f 也在 F' 连续, 再取闭集 $F_\varepsilon \subset F'$ 使得 $m(F' - F_\varepsilon) < \varepsilon/3$, 得证.

事实上, 由于连续性是局部概念, 因此 Lusin 定理对无限测度集也成立, 这时只需考虑

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (Q_i \cap E), \quad (1.107)$$

其中每个 Q_i 为有限测度集, 则根据上述定理, 存在 $A_i \subset E \cap Q_i^\circ$ 满足

$$m((E \cap Q_i) - A_i) \leq \varepsilon/2^i, \quad (1.108)$$

且 f 在 A_i 连续, 考虑这些集合的并, 则 f 在该集合中连续, 并且

$$m(E - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} ((E \cap Q_i) - A_i)\right) \leq \varepsilon, \quad (1.109)$$

得证.

1.5 Brunn-Minkowski 不等式

本节讨论对可测集和的估计, 首先定义集合的和.

定义 1.17 (A+B)

设集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$, 则定义

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}. \quad (1.110)$$

命题 1.20

设有集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$, 则

1. 若 A, B 中有一个为开集, 则 $A + B$ 也是开集.
2. 若 A, B 均为闭集, 则 $A + B$ 可测.

证明

1. 不妨设 A 为开集, 则

$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b), \quad (1.111)$$

而开集的平移还是开集, 开集的任意并还是开集.

2. 仿照证明闭集可测的过程, 首先证明: 若 A 为紧集, B 为闭集, 则 $A + B$ 为闭集. 对任意收敛点列 (设 $z_n \rightarrow z < \infty$)

$$z_n = a_n + b_n, \quad a_n \in A, b_n \in B, \quad (1.112)$$

根据紧集中的 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\{a_n\}$ 存在收敛子列, 不妨就记为其自身, 并记极限为 a , 则综上所述可知

$$b_n = z_n - a_n \rightarrow z - a = b, \quad (1.113)$$

根据闭集的性质易得 $z = x + y \in A + B$, 故 $A + B$ 为闭集, 可测. 对于一般的 A , 利用立方体分割可得

$$A + B = \bigcup_{k=1}^{\infty} [(Q_k \cap A) + B] \quad (1.114)$$

为 F_σ 集, 故 $A + B$ 可测.

如果希望通过 A, B 的测度对 $A + B$ 的测度进行估计 (这里假定 $A + B$ 可测), 首先可以发现其上界并不好估计, 下例可以构造出两个零测集 A, B , 其和不是零测集.

例 1.8 设在 $\mathbb{R}^2$ 中 $A = I \times \{0\}$, $B = \{0\} \times I$, 则 $A + B = I^2$, 但 $m(A) = m(B) = 0$, $m(A + B) = 1$.

如果估计下界, 则可以猜想是否有

$$m(A + B)^\alpha \geq c_\alpha [m(A)^\alpha + m(B)^\alpha] \quad (1.115)$$

成立, 其中 $\alpha > 0$, c_α 是与 A, B 无关的常数. 这种思想来自“凸性”, 若 $A \subset \mathbb{R}^d$ 为凸集, 即对任意 $x, y \in A, t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in A$, 则 $A + \lambda A = (1 + \lambda)A$, 此时成立

$$m(A + \lambda A) = (1 + \lambda)^d m(A) \quad (1.116)$$

对于 $\alpha \geq 1/d$ 有 $(1 + \lambda)^{d\alpha} \geq 1 + \lambda^{d\alpha}$, 因此

$$m(A + \lambda A)^\alpha \geq m(A)^\alpha + m(\lambda A)^\alpha \quad (1.117)$$

如果取 $\alpha = 1/d$, 并用一般的集合 B 代替 λA , 则可以得到如下定理.

定理 1.15 (Brunn-Minkowski)

若 $A, B, A + B \subset \mathbb{R}^d$ 均可测, 则成立

$$m(A + B)^{1/d} \geq m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}. \quad (1.118)$$

定理的证明分为五步: 矩形、可数矩形、开集、紧集、一般情形, 且不妨设 $m(A), m(B) > 0$.

证明 Step 1. 若 A, B 均为矩形, 边长分别为 $\{a_j\}, \{b_j\}$, 则需要证明

$$\left(\prod_{j=1}^d (a_j + b_j) \right)^{1/d} \geq \left(\prod_{j=1}^d a_j \right)^{1/d} + \left(\prod_{j=1}^d b_j \right)^{1/d} \quad (1.119)$$

根据均值不等式

$$\left(\prod_{j=1}^d \frac{a_j}{a_j + b_j} \right)^{1/d} + \left(\prod_{j=1}^d \frac{b_j}{a_j + b_j} \right)^{1/d} \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \frac{a_j}{a_j + b_j} + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \frac{b_j}{a_j + b_j} = 1 \quad (1.120)$$

移项即证.

Step 2. 下面考虑 A, B 为 (内部无交) 矩形可数并的情形, 只需考虑有限个 (证毕取极限即可), 根据可测集的平移性质, 可以设 $A_- = A \cap \{x_j \leq 0\}$, $A_+ = A \cap \{x_j \geq 0\}$, 则 $A = A_- \cup A_+$, $B = B_- \cup B_+$, 以及保证

$$\frac{m(B_\pm)}{m(B)} = \frac{m(A_\pm)}{m(A)}, \quad (1.121)$$

而 $A + B \supset (A_+ + B_+) \sqcup (A_- + B_-)$, 因为它们分布在不同区域, 因此有

$$m(A + B) \geq m(A_+ + B_+) + m(A_- + B_-) \quad (1.122)$$

$$\geq [m(A_+)^{1/d} + m(B_+)^{1/d}]^d + [m(A_-)^{1/d} + m(B_-)^{1/d}]^d \quad (1.123)$$

$$= m(A_+) \left[1 + \left(\frac{m(B)}{m(A)} \right)^{1/d} \right]^d + m(A_-) \left[1 + \left(\frac{m(B)}{m(A)} \right)^{1/d} \right]^d \quad (1.124)$$

$$= [m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}]^d \quad (1.125)$$

得证.

Step 3. 接着考虑 A, B 为有限测度开集的情形, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在几乎无交的矩形并 $A_\varepsilon \subset A, B_\varepsilon \subset B$ 使得

$$m(A) \leq m(A_\varepsilon) + \varepsilon, \quad m(B) \leq m(B_\varepsilon) + \varepsilon \quad (1.126)$$

而 $A + B \supset A_\varepsilon + B_\varepsilon$, 因此

$$m(A + B) \geq m(A_\varepsilon + B_\varepsilon) \geq [m(A_\varepsilon)^{1/d} + m(B_\varepsilon)^{1/d}]^d \geq [(m(A) - \varepsilon)^{1/d} + (m(B) - \varepsilon)^{1/d}]^d \quad (1.127)$$

根据 ε 任意性得证.

Step 4. 再考虑 A, B 为紧集的情形, 令开集 $A^\varepsilon = \{x : d(x, A) < \varepsilon\}$, 则 $A^\varepsilon \searrow A$, 对于 $B^\varepsilon, (A + B)^\varepsilon$ 同理, 并且由于

$$A + B \subset A^\varepsilon + B^\varepsilon \subset (A + B)^{2\varepsilon}, \quad (1.128)$$

因此

$$m(A + B)^{2\varepsilon} \geq m(A^\varepsilon + B^\varepsilon) \geq [m(A^\varepsilon)^{1/d} + m(B^\varepsilon)^{1/d}]^d \quad (1.129)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得.

Step 5. 对于一般的可测集 $A, B, A + B$, 根据定理 1.5, 借助包含于其中的紧集进行逼近即证.

第2章 积分理论

2.1 Lebesgue 积分

本节通过如下四步讨论建立基本的 Lebesgue 积分理论：

1. 简单函数 (simple function) .
2. 支撑在有限测度集上的有界函数.
3. 非负函数.
4. 一般可积函数.

Step 1. 简单函数 (simple function)

在上一章中，简单函数定义为

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}(x), \quad (2.1)$$

其中 E_k 均为有限测度集. 注意到同一简单函数可能会有不同表示 (比如考虑不同区域的重叠、取同值区域的分解等), 为了避免这方面影响, 可以考虑其**规范形式 (canonical form)**, 注意到 φ 仅取到有限值 $c_1, \dots, c_M$, 因此令 $F_k = \{x : \varphi(x) = c_k\}$, 则所有 F_k 两两无交, c_k 两两不同, 且 $\varphi = \sum_{k=1}^M c_k \chi_{F_k}$, 在此基础上可以定义 Lebesgue 积分

定义 2.1 (Lebesgue 积分: 简单函数)

设 $\varphi = \sum_{k=1}^M c_k \chi_{F_k}(x)$ 为简单函数 (规范形式), 则定义其 Lebesgue 积分为

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^M c_k m(F_k). \quad (2.2)$$

注

1. 若 E 为有限测度集, 则 $\varphi \chi_E$ 也是简单函数, 因此可以定义 φ 在 E 上的积分为

$$\int_E \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \chi_E(x) dx. \quad (2.3)$$

2. 有时为了强调积分依赖 Lebesgue 测度, 积分也表示为

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dm(x), \quad (2.4)$$

但简便起见, 有时候也会用 $\int \varphi(x) dx$ 或 $\int \varphi$ 表示 φ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的积分.

下面讨论积分的一些性质.

命题 2.1

简单函数的积分具有如下性质:

1. 良定性: 若 $\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}$ 为简单函数 (未必是规范形式), 则

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^N a_k m(E_k). \quad (2.5)$$

2. 线性性: 若 φ, ψ 为简单函数, $a, b \in \mathbb{R}$ 则

$$\int (a\varphi + b\psi) = a \int \varphi + b \int \psi. \quad (2.6)$$

3. 可加性: 若 $E, F \subset \mathbb{R}^d$ 有有限测度且不相交, 则

$$\int_{E \cup F} \varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi. \quad (2.7)$$

4. 单调性: 若两个简单函数满足 $\varphi \leq \psi$, 则

$$\int \varphi \leq \int \psi. \quad (2.8)$$

5. 三角不等式: 若 φ 为简单函数, 则 $|\varphi|$ 也是简单函数, 且有

$$\left| \int \varphi \right| \leq \int |\varphi|. \quad (2.9)$$



证明

1. 设 $\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}$, 若 E_k 两两无交 (但不保证 a_k 两两不同), 则将相同的 a_k 归拢可知命题成立; 若 E_k 不两两无交, 则可以将 $\{E_k\}$ 有限划分为两两无交的 $\{E'_j\}$, 定义

$$a'_j = \sum \{a_k : E_k \supset E'_j\}, \quad (2.10)$$

则显然有 $\varphi = \sum_{j=1}^n a'_j \chi_{E'_j}$, 根据无交情况的讨论可知

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^n a'_j m(E'_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{E_k \supset E'_j} a_k m(E'_j) = \sum_{k=1}^N \sum_{E'_j \subset E_k} a_k m(E'_j) = \sum_{k=1}^N a_k m(E_k). \quad (2.11)$$

上述求和号的交换可直接考虑其求和总对象 (或考虑某种记重数的并), 得证.

2. 有限集合可以进行一定分割, 使得取值恰好 “对应”, 此时满足线性性, 再根据 1 的良好性得证.
 3. 注意到 $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$.
 4. 注意到 $\psi - \varphi$ 为简单函数且取非负值.
 5. 直接利用 $\mathbb{R}$ 中三角不等式证明

$$\left| \int \varphi \right| = \left| \sum_{k=1}^N a_k m(E_k) \right| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| m(E_k) = \int |\varphi|. \quad (2.12)$$

最后再给出一个简单积分的一个简单性质: 若 f, g 为几乎处处相等的简单函数, 则有 $\int f = \int g$, 事实上, 这种性质对后面的几种函数都适用.

Step 2. 支撑在有限测度集上的有界函数

定义 2.2 (支集)

定义函数 f 的支集为

$$\text{supp } f = \{x : f(x) \neq 0\}. \quad (2.13)$$

称 f 支撑在集合 E 上, 若对任意 $x \notin E$ 都有 $f(x) = 0$.



特别当 f 为可测函数时, $\text{supp } f = \{f < 0\} \cup \{f > 0\}$ 也是可测集. 本节主要讨论对象就是满足

$$m(\text{supp } f) < \infty \quad (2.14)$$

的有界可测函数.

上一章定理 1.11 表明, 若 f 为有界可测函数 (支撑在 E), 则存在有界简单函数列 $\{\varphi_n\}$ (支撑在 E) 满足

$$|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)|, \quad \varphi_n(x) \rightarrow f(x). \quad (2.15)$$

借助这种观点, 可以将 Lebesgue 积分进行一些推广.

引理 2.1

设 f 有界且支撑在有限测度集 E 上, $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为 E 上的简单函数列, 以 M 为界, 并且有 $\varphi_n(x) \rightarrow f(x), a.e.$, 则

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n$ 存在.
2. 若 $f = 0, a.e.$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n = 0$.



如果在 E 中有 $\varphi_n \rightrightarrows f$, 则引理易证, 回顾 Littlewood 三原理: 每个收敛可测函数列都近乎一致收敛, 因此借助 Egorov 定理可以完成证明.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$ 使得 $m(E - A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, 且在 A_ε 中 $\varphi_n \rightrightarrows f$, 令 $I_n = \int \varphi_n$, 则有

$$|I_n - I_m| \leq \int_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx \quad (2.16)$$

$$= \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx + \int_{E - A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx \quad (2.17)$$

$$\leq \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| dx + 2M\varepsilon \quad (2.18)$$

根据一致收敛性, 只要 m, n 充分大, 在 A_ε 中中就一致有 $|\varphi_n - \varphi_m| < \varepsilon$, 因此

$$|I_n - I_m| \leq (m(E) + 2M)\varepsilon, \quad (2.19)$$

得证. 引理的第二部分只需重复上述过程可得 $|I_n| \leq (m(E) + M)\varepsilon$, 得证.

定义 2.3 (Lebesgue 积分: 有限支集)

对于支撑在有限测度集上的有界函数 f , 定义其 Lebesgue 积分为

$$\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n, \quad (2.20)$$

其中 $\{\varphi_n\}$ 满足: $|\varphi_n| \leq M$; φ_n 支撑在 $\text{supp}(f)$ 上; $\varphi_n(x) \rightarrow f(x), a.e.$.



注 根据前述引理, 上述极限是存在的; 若假设有两个满足条件的函数列 $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$, 则 $\varphi_n - \psi_n \rightarrow 0, a.e.$, 因此根据引理可知二者积分差的极限为 0, 因此上面的定义是良好的.

容易验证, 如此推广后的积分仍满足上一步验证过的诸多性质.

命题 2.2

设 f, g 为支撑在有限测度集上的有界函数, 则其积分具有如下性质:

1. 线性性: 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 则

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g. \quad (2.21)$$

2. 可加性: 若 $E, F \subset \mathbb{R}^d$ 有有限测度且不相交, 则

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f. \quad (2.22)$$

3. 单调性: 若 $f \leq g$, 则

$$\int f \leq \int g. \quad (2.23)$$

4. 三角不等式: $|f|$ 有界, 同样支撑在有限测度集上, 并且

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|. \quad (2.24)$$



下面给出一个重要的收敛定理.

定理 2.1 (有界收敛定理)

设 $\{f_n\}$ 为一列可测函数, 有一致的界 M , 并且都支撑在有限测度集 E 上, 并且 $f_n(x) \rightarrow f(x), a.e.$, 则 f 也可测、有界、支撑在 E 上 ($a.e.$) 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| = 0, \quad \int f_n \rightarrow \int f. \quad (2.25)$$

♡

证明 易知 f 在 E 上几乎处处有界 M , 并且在 E 外几乎处处为 0, 根据 Egorov 定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$, $m(E - A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, 使得在 A_ε 中 $f_n \Rightarrow f$, 因此对充分大的 n 有 $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$, 即得

$$\int |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_{A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{E - A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx \quad (2.26)$$

$$\leq m(E)\varepsilon + 2Mm(E - A_\varepsilon) \quad (2.27)$$

$$\leq \varepsilon(m(E) + 2M) \quad (2.28)$$

得证.

上面的定理隐含了积分与极限运算的交换, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad (2.29)$$

这种交换在 Riemann 积分中要求是较为严苛的, 而在 Lebesgue 积分中要宽松些.

推论 2.1

沿用上一定理的记号, 若 $f \geq 0$, 有界且支撑在有限测度集 E 上, 且 $\int f = 0$, 则 $f = 0, a.e.$

♡

证明 定义 $E_k = \{x \in E : f(x) \geq 1/k\}$, 则 $k^{-1}\chi_{E_k}(x) \leq f(x)$, 根据积分的单调性可知

$$k^{-1}m(E_k) \leq \int f = 0, \quad (2.30)$$

由此对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $m(E_k) = 0$, 而 $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 因此该集合零测, $f = 0, a.e.$

在开始对非负函数的讨论前, 暂且回到 Riemann 积分, 证明 Lebesgue 积分确实是 Riemann 积分的一个推广, 即闭区间上 Riemann 可积必定 Lebesgue 可积.

定理 2.2

设 f 为 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数, 则

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x) dx, \quad (2.31)$$

即两种积分意义下的结果相同.

♡

注 在数学分析中证明过, f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积当且仅当其不连续点集为零测集, 这用实分析的语言表述就是 f 几乎处处连续.

证明 Riemann 可积函数必定有界, 因此只需证明其可测. 对于可积函数, 可取两个阶梯函数列 $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ 满足 $|\varphi_k|, |\psi_k| \leq M$, 并且对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq f \leq \dots \leq \psi_2(x) \leq \psi_1(x) \quad (2.32)$$

以及

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x) dx. \quad (2.33)$$

显然阶梯函数的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相同, 即 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k$, $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k$, 若令 $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ 分别为两个函数列的极限, 则二者均为可测函数, 且 $\tilde{\varphi} \leq f \leq \tilde{\psi}$, 由有界收敛定理可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\varphi}(x) dx, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\psi}(x) dx \quad (2.34)$$

但其极限相同, 因此

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} (\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x)) dx = 0, \quad (2.35)$$

而 $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi} \geq 0$, 故 $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi} = 0, a.e.$, 因此 $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = f, a.e.$, 这说明 f 可测, 由于 $\varphi_k \rightarrow f, a.e.$, 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k(x) dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x) dx, \quad (2.36)$$

故 f 的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相同.

Step 3. 非负函数

下面讨论非负函数的 Lebesgue 积分, 这里只要求函数非负可测, 并不要求其有界 (甚至可以取到 $+\infty$).

定义 2.4 (Lebesgue 积分: 非负情形)

对于非负可测函数 f , 定义其 Lebesgue 积分为

$$\int f(x) dx = \sup_g \int g(x) dx, \quad (2.37)$$

其中 g 为可测函数, 满足 $0 \leq g \leq f$, 并且支撑在有限测度集中.



根据上面的定义, 上确界可能为有限, 也可能为无穷, 若有限, 则称函数 **Lebesgue 可积** (或简称可积). 对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$, $f \geq 0, \chi_E \geq 0$, 因此可定义

$$\int_E f(x) dx = \int f(x) \chi_E(x) dx. \quad (2.38)$$

同样地, 下面考虑积分的一些性质.

命题 2.3

设 f, g 为非负可测函数, 则其积分具有如下性质:

1. 线性性: 若 $a, b \in \mathbb{R}_+$ 则

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g. \quad (2.39)$$

2. 可加性: 若 $E, F \subset \mathbb{R}^d$ 有有限测度且不相交, 则

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f. \quad (2.40)$$

3. 单调性: 若 $f \leq g$, 则

$$\int f \leq \int g. \quad (2.41)$$

4. 若 g 可积且 $0 \leq f \leq g$, 则 f 也可积.

5. 若 f 可积, 则 $f(x) < \infty, a.e.$.

6. 若 $\int f = 0$, 则 $f(x) = 0, a.e.$.



证明

- 不妨设 $a = b = 1$, 设 $\varphi \leq f, \psi \leq g$ 为满足定义的函数, 则放缩后取上确界得到 $\int f + \int g \leq \int (f + g)$; 反过来设 $\eta \leq f + g$, 并定义 $\eta_1(x) = \min(f(x), \eta(x)) \leq f(x)$, $\eta_2 = \eta - \eta_1 = f + g - \eta \leq g$, 则

$$\int \eta = \int (\eta_1 + \eta_2) = \int \eta_1 + \int \eta_2 \leq \int f + \int g, \quad (2.42)$$

对 η 取上确界得证.

- 注意到 $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$ 易证.
- 任何满足定义的 φ 都有 $0 \leq \varphi \leq f \leq g$, 因此 g 对应的上确界更大.

4. g 可积说明 $\int g < \infty$, 故

$$\sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq g} \int \varphi = \int g < \infty, \quad (2.43)$$

因此由确界原理得证.

5. 设 $E_k = \{f \geq k\}$, $E_\infty = \{f = \infty\}$, 则

$$\int f \geq \int f \chi_{E_k} \geq km(E_k), \quad m(E_k) \leq \frac{C}{k} \quad (2.44)$$

由于 $E_k \searrow E_\infty$, 因此 $m(E_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$, 得证.

6. 取一列递增简单函数逼近 f , 根据积分放缩可知每个简单函数都几乎处处为 0, 因此 f 也几乎处处为 0.

下面考虑一些非负可测函数的收敛定理, 其动机依旧来自算子换序问题. 但是不同于有界收敛定理, 这时并没有非常好的结果, 例如考虑

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < 1/n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.45)$$

则 $f_n \rightarrow 0$, 但是

$$0 \leq 1 = \int f_n, \quad (2.46)$$

即极限函数的积分小于积分的极限, 更严格地见如下定理.

定理 2.3 (Fatou)

设 $\{f_n\}$ 为正项可测函数列, 并且 $f_n \rightarrow f, a.e.$, 则

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (2.47)$$

证明 若 $\int f = \infty$, 则右式也为 ∞ , 因此仅考虑 f 可积的情形. 设 $0 \leq g \leq f$, 其中 g 有界且支撑在有限测度集 E 上, 设 $g_n(x) = \min\{g(x), f_n(x)\}$, 则 g_n 可测且支撑在 E 上, 并且 $g_n(x) \rightarrow g(x), a.e.$, 根据有界收敛定理有

$$\int g_n \rightarrow \int g, \quad (2.48)$$

根据 g_n 的构造有 $g_n \leq f_n$, 因此 $\int g_n \leq \int f_n$, 两边取下极限有

$$\int g \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \quad (2.49)$$

左边再对 g 取上确界 (根据非负可测函数 Lebesgue 积分的定义), 得证.

尽管如此, 对于一些特殊的情形, 积分与极限仍然可以交换.

推论 2.2

设 f 为非负可测函数, $\{f_n\}$ 为非负可测函数列, 且 $f_n(x) \leq f(x)$, $f_n \rightarrow f, a.e.$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f. \quad (2.50)$$

证明 由于 $f_n \leq f$, 因此 $\int f_n \leq \int f$, 故

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f, \quad (2.51)$$

根据 Fatou 引理即证.

下面的记号 $f_n \nearrow f$ 表示 f_n 几乎处处单增收敛到 f .

推论 2.3 (单调收敛定理)

设 $\{f_n\}$ 为非负可测函数列, 且 $f_n \nearrow f$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f. \quad (2.52)$$

根据单调收敛定理, 可以给出如下推论, 其一是 Fatou 引理的推广, 其二是函数项级数的结论.

推论 2.4 (Fatou)

设 $\{f_n\}$ 为非负可测函数列, 则

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (2.53)$$

证明 设 $g_n(x) = \inf_{i \geq n} f_i(x)$, 则 g_n 非负可测且对任意 $i \geq n$ 有

$$g_n \leq f_i \Rightarrow \int g_n \leq \int f_i \Rightarrow \int g_n \leq \inf_{i \geq n} \int f_i, \quad (2.54)$$

而 $g_n \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$, 因此由单调收敛定理可得

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (2.55)$$

推论 2.5

考虑函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, 其中 $a_k(x)$ 非负可测, 则

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x) dx. \quad (2.56)$$

证明 令 f_n 为级数的部分和, 易知.

上面的推论实际上表明, 若 $\sum \int a_k(x) < \infty$, 则 $\sum a_k(x)$ 可积, 即几乎处处有限. 借助这种观察, 可以给出 Cantor-Cantelli 引理的证明.

引理 2.2 (Cantor-Cantelli)

设 $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ 为一组可测集, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$, 则 $E = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ 为零测集.

将上极限集表示为集合的交并形式, 可以直接证明上述结论, 为了使用前述推论, 令 $a_k(x) = \chi_{E_k}(x)$, 则 $x \in E$ (即有无限个 E_k 包含 x) 当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \infty$, 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x) dx < \infty, \quad (2.57)$$

因此 $\sum a_k(x)$ 几乎处处有界, 故 E 为零测集.

下面讨论一个具体的函数, 为后面的章节铺垫.

例 2.1 定义 $\mathbb{R}^d$ 中的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1/|x|^{d+1}, & x \neq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.58)$$

下证对任意 $\varepsilon > 0$, f 在 $|x| \geq \varepsilon$ 可积.

固定 $\varepsilon > 0$, 令 $A_k = \{x \in \mathbb{R}^d : 2^k \varepsilon < |x| \leq 2^{k+1} \varepsilon\}$ 并定义

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \quad a_k(x) = \frac{1}{(2^k \varepsilon)^{d+1}} \chi_{A_k}(x), \quad (2.59)$$

则 $f(x) \leq g(x)$, $\int f \leq \int g$, 由于每个 A_k 都是 $A = \{1 < |x| \leq 2\}$ 的拉伸, 因此根据 Lebesgue 测度的性质可得 $m(A_k) = (2^k \varepsilon)^d m(A)$, 因此

$$\int g = \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(A_k)}{(2^k \varepsilon)^{d+1}} = m(A) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k \varepsilon} = \frac{C}{\varepsilon}, \quad (2.60)$$

得证.

Step 4. 一般可积函数

下面考虑更一般的情形，称实值函数 f Lebesgue 可积，若 $|f|$ Lebesgue 可积（这在上一部分定义过）。而其积分可以通过分解来定义，记

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}, \quad (2.61)$$

则 $f^+, f^- \geq 0$ 且 $f = f^+ - f^-$ ，因此可定义 f 的 Lebesgue 积分为

$$\int f = \int f^+ - \int f^-. \quad (2.62)$$

这里依旧存在良定性，若存在两个非负可积函数满足 $f = f_1 - f_2$ ，是否仍然有

$$\int f = \int f_1 - \int f_2, \quad (2.63)$$

设 $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ 为两种表示，则 $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$ ，各项都是非负可积函数，因此积分可得

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2, \quad (2.64)$$

移项得证。

根据定义可知，如果仅改变 f 在一个零测集上的取值，那么 f 的可积性与积分值都不会受到影响，这也说明可以考虑“几乎处处有限”，即仅在一个零测集取无穷值的函数，并且两个可积函数可以随意相加（因为其无穷值仍然在一个零测集中）。此外，在积分理论中，“几乎处处”实际上给出了函数之间的一个等价关系，在这种观点下称 $f = g$ ，实际上是说 $f = g, a.e.$

与前面类似，容易验证：

命题 2.4

Lebesgue 积分满足线性、可加性、单调性以及三角不等式。

为了证明后面的定理，考虑如下引理。

引理 2.3

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可积函数，则对任意 $\varepsilon > 0$ ：

1. 存在有限测度集 B 使得

$$\int_{B^c} |f| < \varepsilon. \quad (2.65)$$

2. 绝对连续性：存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $m(E) < \delta$ 都有

$$\int_E |f| < \varepsilon. \quad (2.66)$$

证明

1. 不妨设 $f \geq 0$. 定义 $B_N = B_N(0)$, $f_N(x) = f(x)\chi_{B_N}(x)$ ，则

$$f_N \geq 0, \quad f_N \nearrow f, \quad (2.67)$$

根据单调收敛定理有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int f_N = \int f, \quad (2.68)$$

因此当 N 充分大时有

$$0 \leq \int f - \int f\chi_{B_N} = \int f\chi_{B_N^c} = \int_{B_N^c} f < \varepsilon, \quad (2.69)$$

得证。

2. 对于第二部分，令

$$E_N = \{x : f(x) \leq N\}, \quad f_N(x) = f(x)\chi_{E_N}, \quad (2.70)$$

则 f_N 非负、单调且收敛到 f , 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得

$$\int (f - f_N) < \varepsilon/2, \quad (2.71)$$

取 $0 < \delta < \varepsilon/2N$, 则对任意 $m(E) < \delta$ 有

$$\int_E f = \int_E (f - f_N) + \int_E f_N \leq \int_E (f - f_N) + Nm(E) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad (2.72)$$

下面证明 Lebesgue 积分的基石定理之一: 控制收敛定理 (dominant convergence theorem), 它解释了积分与极限的换序关系.

定理 2.4 (控制收敛定理)

设 $\{f_n\}$ 为一列可测函数且 a.e. 收敛到 f , 若存在可积函数 g 使得 $|f_n(x)| \leq g(x)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| = 0, \quad \int f_n \rightarrow \int f. \quad (2.73)$$



证明 对任意 $N \geq 0$, 设

$$E_N = \{x : |x| \leq N, g(x) \leq N\}, \quad (2.74)$$

则根据上一条引理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得

$$\int_{E_N^c} g < \varepsilon, \quad (2.75)$$

因此 $f_n \chi_{E_N}$ 的上界被 N 控制, 且支撑在一个有限测度集上, 根据有界收敛定理可知对充分大的 n 有

$$\int_{E_N} |f_n - f| < \varepsilon, \quad (2.76)$$

因此直接估计可得

$$\int |f_n - f| = \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| \quad (2.77)$$

$$\leq \int_{E_N} |f_n - f| + 2 \int_{E_N^c} g \quad (2.78)$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon, \quad (2.79)$$

得证.

复值函数

$\mathbb{R}^d$ 上的实变复值函数可以表示为

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad (2.80)$$

其中 u, v 均为实值函数, 称为 f 的实部与虚部, 延续前面的讨论, 称 f Lebesgue 可积, 若函数

$$|f(x)| = \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2} \quad (2.81)$$

Lebesgue 可积. 由于

$$|u(x)|, |v(x)| \leq |f(x)|, \quad |f(x)| \leq |u(x)| + |v(x)|, \quad (2.82)$$

因此 f 可积当且仅当 u, v 可积. 进一步, f 的 Lebesgue 积分可定义为

$$\int f = \int u + i \int v, \quad \int_E f = \int f \chi_E. \quad (2.83)$$

容易验证, 可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 上的所有复值可积函数构成了一个 $\mathbb{C}$ -向量空间 (由于 $|f+g| \leq |f| + |g|$, 故 f, g 可积可推出 $f+g$ 可积).

2.2 可积函数空间 L^1

根据定义, 所有 Lebesgue 可积函数可以构成一个向量空间, 并且可以在其中定义范数/距离, 进一步可以验证该空间在适当范数下完备. 首先定义这一范数.

定义 2.5 (L^1 范数)

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可积函数, 定义其 L^1 范数为

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx. \quad (2.84)$$



注 本节讨论的范数基本都是 L^1 范数, 因此一般省略 L^1 下标.

很容易验证其满足范数的如下性质:

命题 2.5

设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

1. $\|af\| = |a| \|f\|, \forall a \in \mathbb{C}.$
2. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$
3. $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0, a.e..$



其中第 3 条需要做一些说明, 很容易找到一个不恒为 0 的可测函数, 其积分为 0, 因此 $\|f\| = 0$ 并不能保证 $f = 0$, 解决这一问题的方法是代数中常见的“商运算”, 即将函数空间模去几乎处处相等的等价关系, 这就很熟悉了.

范数可以诱导距离, 定义为

$$d(f, g) = \|f - g\|, \quad (2.85)$$

很容易验证其满足距离的性质:

命题 2.6

设 $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

1. $d(f, g) = d(g, f).$
2. $d(f, g) = 0$ 当且仅当 $f = g, a.e..$
3. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$



下面讨论一个重要的问题: L^1 空间的完备性.

定义 2.6 (Cauchy 列 & 完备性)

设 (V, d) 为度量空间, 称 $\{x_k\} \subset V$ 为 Cauchy 列, 若

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} d(x_k, x_l) = 0. \quad (2.86)$$

称度量空间 (V, d) 完备, 若其中任何 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 都存在 $x \in V$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0. \quad (2.87)$$



引理 2.4

设 $\{f_k\}$ 为度量空间 (V, d) 中的 Cauchy 列, 若其存在子列 $\{f_{n_k}\}$ (依度量) 收敛到 f , 则 f_k (依度量) 收敛到 f .



证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 使得对任意 $n_k > N_1$ 有 $\|f_{n_k} - f\| < \varepsilon/2$, 也存在 N_2 使得对任意 $k > N_2$ 有

$\|f_{n_k} - f_k\| < \varepsilon/2$, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则对任意 $k > N$ 有

$$\|f_k - f\| \leq \|f_k - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon, \quad (2.88)$$

得证.

定理 2.5 (Riesz-Fischer)

L^1 空间在前述度量下是完备的.



证明 设 $\{f_n\}$ 为 L^1 空间中的 Cauchy 列, 考虑子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得对任意 $k \geq 1$ 有

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad (2.89)$$

该子列存在是因为根据定义, 对任意 $m, n \geq N(\varepsilon)$ 就有

$$\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon, \quad (2.90)$$

取 $n_k = N(2^{-k})$ 即可.

定义函数

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \quad (2.91)$$

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad (2.92)$$

由于 g 是一个函数列的单调极限, 根据单调收敛定理可知

$$\int g = \int |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \int |f_{n_1}| + 1 < \infty, \quad (2.93)$$

即 $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 而显然 $|f(x)| \leq g(x)$, 根据控制收敛定理可知 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$, 根据引理可知 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, 得证.

根据上面的过程可得推论

推论 2.6

设 $\{f_n\}$ 为 L^1 中的 Cauchy 列, 其依度量极限为 f , 则存在子列 f_{n_k} 使得 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$.



有理数在实数中是稠密的, 类似在 L^1 中也可以考虑稠密性.

定义 2.7 (稠密性)

称一族函数 $\mathcal{G}$ 在 L^1 稠密, 若对任意 $f \in L^1, \varepsilon > 0$, 存在 $g \in \mathcal{G}$ 使得 $\|f - g\| < \varepsilon$.



幸运的是, 过去见到许多用以逼近可测函数的函数族都是稠密的.

定理 2.6

如下函数族都在 L^1 中稠密:

1. 简单函数.
2. 阶梯函数.
3. 有紧支集的连续函数.



证明

1. 不妨设 $f \geq 0$, 则存在递增简单函数列 $\varphi_k \rightarrow f$, 根据控制收敛定理可知

$$\|f - \varphi_k\| = \int |f - \varphi_k| \rightarrow 0. \quad (2.94)$$

2. 由 1 知存在简单函数 φ 使得 $\|f - \varphi\| < \varepsilon$, 只需证明阶梯函数对简单函数稠密即可, 若不妨设 $\varphi = \chi_E$, 则

根据定理 1.5 第 4 条可知存在一族几乎不相交的矩形 $\{R_j : 1 \leq j \leq n\}$ 使得 $m(E \triangle \bigcup_{j=1}^n R_j) \leq \varepsilon$, 因此令

$$\psi = \sum_{j=1}^n \chi_{R_j}, \quad (2.95)$$

则

$$\|\psi - \chi_E\| = m(E \triangle \bigcup_{j=1}^n R_j) \leq \varepsilon, \quad (2.96)$$

得证.

3. 在 2 的基础上, 只需证明紧支集连续函数对示性函数 χ_R (R 为矩形) 稠密即可, 对于一维情形 ($R = [a, b]$), 取充分小的 $\varepsilon > 0$, 定义

$$g(x) = \chi_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}, \quad (2.97)$$

并将其延拓为 $[a, b]$ 上的线性函数即可 (使得 g 在 $[a, b]$ 外为 0), 对于高维情形, 将上面的 g 作 product 即可.

事实上, 如果将 $\mathbb{R}^d$ 替换为一个有限测度集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 可以建立空间 $L^1(E)$, 且对 $\mathbb{R}^d$ 中的函数有范数

$$\|f\|_{L^1(E)} = \|f\chi_E\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.98)$$

容易验证前面的诸多性质仍然成立.

更多性质

下面考虑一些可积函数的性质, 对于 $h \in \mathbb{R}^d$, 可以定义:

1. 平移变换: $f_h(x) = f(x - h)$.
2. 拉伸变换: $f(x) \mapsto f(\delta x), \delta > 0$.
3. 反向变换: $f(x) \mapsto f(-x)$.

若 $f = \chi_E$, 则 $f_h = \chi_{E_h}$, 此时显然有 $\|f_h\| = \|f\|$; 若 $f \geq 0$, 则借助单调简单函数列 φ_k 逐点逼近 f 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x - h) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx. \quad (2.99)$$

进一步易得对任意 f 有上式成立. 类似也容易验证有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x) dx, \quad (2.100)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(-x) dx. \quad (2.101)$$

根据上面的性质, 可以定义出两个函数的卷积:

定义 2.8 (卷积)

设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 函数 $y \mapsto f(x - y)g(y)$ 也可积, 因此可定义 f, g 的卷积

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) dy. \quad (2.102)$$



借助平移可以衡量函数的连续性, 因为 f 在 x 处连续当且仅当 $f_h(x) \rightarrow f(x)$, 根据前文内容可知, 可测函数未必连续, 甚至可能处处不连续, 因此上式对一般可测函数不成立, 但在 L^1 度量下这却是成立的.

命题 2.7

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f_h - f\| = 0. \quad (2.103)$$



证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧支集连续函数 g 使得 $\|f - g\| < \varepsilon$, 而

$$f_h - f = (g_h - g) + (f_h - g_h) - (f - g), \quad (2.104)$$

根据 $\|f_h - g_h\| = \|f - g\| < \varepsilon$ 以及 g 的一致连续性, 当 h 充分小时有

$$\|g_h - g\| = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-h) - g(x)| dx < \varepsilon, \quad (2.105)$$

$$\|f_h - f\| \leq \|g_h - g\| + \|f_h - g_h\| + \|f - g\| \quad (2.106)$$

$$\leq 3\varepsilon, \quad (2.107)$$

得证.

2.3 Fubini 定理

若 $d = d_1 + d_2$, 则 $\mathbb{R}^d$ 可以分解为 $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, 若 f 定义在 $\mathbb{R}^d$ 中, 则可以将 f 写作 $f(x, y)$, 其中 $x \in \mathbb{R}^{d_1}, y \in \mathbb{R}^{d_2}$, 并且可以定义 f 关于 x, y 的切片为

$$f_x(y) = f(x, y), \quad f^y(x) = f(x, y), \quad (2.108)$$

类似地, 对于集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 也可作切片

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\}, \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x, y) \in E\}, \quad (2.109)$$

如下图所示

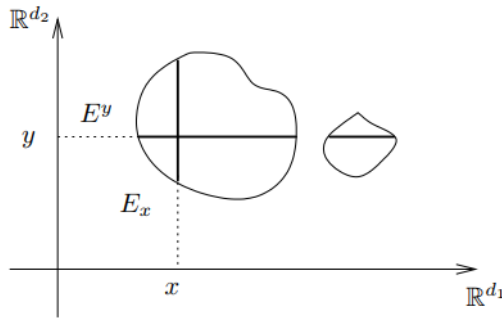


图 2.1: E 的切片

2.3.1 Fubini 定理的证明

定理 2.7 (Fubini)

设 f 为 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上的可积函数, 则对 a.e. 的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ 有

1. 切片 $f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中可积.
2. 关于 y 的函数 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 可积.
- 3.

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f. \quad (2.110)$$

注 若 f_x, f^y 均可积, 不能得到 f 可积, Sierpinski 给出过一个 $\mathbb{R}^2$ 子集的构造, 该集合不可测, 但与任意直线至多只有两个交点, 考虑其上的示性函数即得反例.

Fubini 定理说明, 可积函数的积分可以交换次序, 即

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dy \right) dx, \quad (2.111)$$

这很容易理解,但并不平凡,比如对于可测函数 f 或可测集 E ,都不能保证其切片依然可测(比如 $\mathcal{N} \times \{0\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 零测,但关于 $y=0$ 的切片不可测).记 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的所有满足 Fubini 定理的可积函数,则 Fubini 定理实际上只需证明 $L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}$.

出于这一思路,考虑到简单函数在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中的稠密性,因此 Fubini 定理分为如下步骤:

1. 证明 $\mathcal{F}$ 是一个线性空间,即对线性组合封闭.
2. 证明 $\mathcal{F}$ 对单调极限下封闭.
3. 证明简单函数在 $\mathcal{F}$ 中,只需证明任何有限测度集上的示性函数在 $\mathcal{F}$ 中.
4. 证明一般可积函数都在 $\mathcal{F}$ 中.

命题 2.8

Step 1. $\mathcal{F}$ 是线性空间.

证明 设 $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}$, 则存在零测集 $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$, 使得 f_k^y 在 A_k 外可积, 设 $A = \bigcup_{k=1}^N A_k$, 则 A 零测, 且在 A 外所有 f_k^y 都可积, 因此其线性组合也可积; 对于 $g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x) dx$ 的讨论是类似的.

命题 2.9

Step 2. 设 $\{f_k\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的序列且 $f_k \nearrow f$, 若 f 可积, 则 $f \in \mathcal{F}$.

注 命题对 $f_k \searrow f$ 的情形也成立.

证明 设 $f_k \nearrow f$, 不妨设 $f_k \geq 0$ (否则考虑 $f_k - f_1 \nearrow f - f_1$), 则根据单调收敛定理有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy, \quad (2.112)$$

由于 $f_k \in \mathcal{F}$, 则存在零测集 $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 使得 f_k^y 在 A_k 外可积, 设 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 则在 A 外有 $f_k^y \nearrow f^y$, 若令

$$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x) dx, \quad g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx \quad (2.113)$$

则根据单调收敛定理有 $g_k \nearrow g$, 再利用单调收敛定理可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) dy, \quad (2.114)$$

$f_k \in \mathcal{F}$ 说明

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y) dx dy, \quad (2.115)$$

则根据上面的极限式有

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy, \quad (2.116)$$

故 Fubini-3 成立, f 可积说明 g 几乎处处有限, 因此 f^y 几乎处处可积, 因此 $f \in \mathcal{F}$, 得证.

命题 2.10

Step 3. 若 E 为有限测度集, 则 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

证明 由简到繁依次证明:

1. 若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为立方体, 则 $E = Q_1 \times Q_2$, 其中 Q_i 为 $\mathbb{R}^{d_i}$ 中的立方体, 这时 $\chi_E^y(x)$ 可积, 并且

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x, y) dx = |Q_1| \chi_{Q_2}, \quad (2.117)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(y) dy = |Q_1| |Q_2| = |E| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E, \quad (2.118)$$

g 的可积性与后式的成立是显然的, 故 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

2. 若 E 为闭立方体 Q 边界的子集, 则显然 E 零测, 且当 $y \in Q_2^o$ 时 $f^y = 0$, 因此 $f^y = 0, a.e.$, 故可积, 同理 $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx = m(E^y)$ 也几乎处处为 0, 自然也可积, 第三条成立是因为两边积分均为 0, 故

$\chi_E \in \mathcal{F}$.

3. 若 $E = \bigcup_{k=1}^K Q_k$, 其中 Q_k 为几乎不相交的立方体, 则 $Q_k = Q_k^\circ \sqcup A_k$, 这里 A_k 为 Q_k 边界, 则将其重组可知

$$\chi_E = \sum_{k=1}^K \chi_{Q_k^\circ} + \chi_{\bigcup_{k=1}^K A_k} \in \mathcal{F}. \quad (2.119)$$

4. 若 E 为有限测度开集, 则可设 $E = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$, 其中 Q_k 为几乎不相交的立方体, 设其前 n 项并为 E_n , 则 $\chi_{E_n} \in \mathcal{F}$ 且 $\chi_{E_n} \nearrow \chi_E \in \mathcal{F}$.
5. 若 E 为 G_δ 集, 则 $E = \bigcap_{k=1}^\infty O_k$, 其中 O_k 为开集 (不妨设其测度有限), 记其前 k 项交为 F_k , 则 $\chi_{F_k} \in \mathcal{F}$ 且 $\chi_{F_k} \searrow \chi_E \in \mathcal{F}$.
6. 若 E 为零测集, 则存在 G_δ 集 G 使得 $E \subset G, m(G) = 0$, 由于 $\chi_G \in \mathcal{F}$, 因此

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_G(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_G = 0, \quad (2.120)$$

这说明 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_G(x, y) dx$ 几乎处处为 0, 也即 G^y “几乎个个” 零测, 而 $E^y \subset G^y$ 说明 E^y “几乎个个” 零测, 故 $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x, y) dx$ 几乎处处为 0 (自然是可积的), 即得

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x, y) dx \right) dy = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E, \quad (2.121)$$

故 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

7. 若 E 为一般的可测集, 则存在 G_δ 集 G 使得 $E \subset G, m(G - E) = 0$, 因此

$$\chi_E = \chi_G - \chi_{G-E} \in \mathcal{F}. \quad (2.122)$$

命题 2.11

Step 4. 若 f 可积, 则 $f \in \mathcal{F}$.

证明 分解 $f = f^+ - f^-$, 其中 f^+, f^- 都是非负可积的, 因此不妨设 $f \geq 0$, 取简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 单调逼近 f , 则每个 φ_k 都是有限测度集上示性函数的线性组合, 故 $\varphi_k \in \mathcal{F}$, 取极限可知 $f \in \mathcal{F}$, 得证.

2.3.2 Fubini 定理的应用

定理 2.8 (Tonelli)

设 $f(x, y)$ 为 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上的非负可测函数, 则对 a.e. 的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ 有

1. 切片 f^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 可测.
2. 关于 y 的函数 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 可测.
- 3.

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f. \quad (2.123)$$

上述定理常与 Fubini 定理同时使用: 首先对可测函数 $|f|$ 使用 Tonelli 定理, 若其有限则说明 f 可积, 再利用 Fubini 定理进行计算.

证明 考虑截断函数

$$f_k(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & |(x, y)| < k, f(x, y) < k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.124)$$

则 f_k 可积且 $f_k \nearrow f$, 由单调收敛定理立得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx, \quad (2.125)$$

根据 Fubini 定理, 存在零测集 A_k 使得 f_k^y 在 A_k 外可积, 令 $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, 则在零测集 A 外 $f_k^y \nearrow f^y$, 因

此 f^y 可测, 若令

$$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x) dx, \quad g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) dx \quad (2.126)$$

则 $g_k \nearrow g$, g 可测, 再次使用单调收敛定理有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) dy, \quad (2.127)$$

而由 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y) dx dy, \quad (2.128)$$

取极限得

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy, \quad (2.129)$$

对于可测集 E , 若取 $f = \chi_E$, 则利用 Tonelli 定理可得如下推论

推论 2.7

设 E 为 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 中的可测集, 则对 a.e. 的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, 切片

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\} \quad (2.130)$$

在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中可测, 并且 $m(E^y)$ 是一个关于 y 的可测函数, 满足

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y) dy. \quad (2.131)$$

命题 2.12

设 $E = E_1 \times E_2$ 为 $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 中的可测集, 且 $m_*(E_2) > 0$, 则 E_1 可测.

证明 根据 Fubini 定理, 存在零测集 $A \subset \mathbb{R}^{d_2}$, 在 A^c 中 E^y 可测, 而

$$0 < m_*(E_2) \leq m_*(E_2 \cap A) + m_*(E_2 \cap A^c) = m_*(E_2 \cap A^c), \quad (2.132)$$

故 $E_2 \cap A^c$ 不为空, 因此取 $y \in E_2 \cap A^c$ 可知 $\chi_{E^y}(x) = \chi_E(x, y) = \chi_{E_1}(x)$, 故 $E_1 = E^y$ 可测.

为了得到反过来的结论, 首先考虑如下引理

引理 2.5

设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$, 则

$$m_*(E_1 \times E_2) \leq m_*(E_1)m_*(E_2). \quad (2.133)$$

注 下面的证明中仅考虑二者外测度有限的情形, 由此出发也容易证明当 E_1 零测时 $E_1 \times E_2$ 零测 (即使 $m_*(E_2) = \infty$).

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 取矩形列 Q_k, Q'_k 使得

$$E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad E_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q'_k, \quad (2.134)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq m_*(E_1) + \varepsilon, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q'_k| \leq m_*(E_2) + \varepsilon, \quad (2.135)$$

此时 $E \subset \bigcup_{k,l} Q_k \times Q'_l$, 因此

$$m_*(E) \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} |Q_k \times Q'_l| \quad (2.136)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} |Q'_l| \right) \quad (2.137)$$

$$\leq (m_*(E_1) + \varepsilon)(m_*(E_2) + \varepsilon), \quad (2.138)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得证.

命题 2.13

设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ 可测, 则 $E = E_1 \times E_2$ 可测, 并且

$$m(E) = m(E_1) \times m(E_2). \quad (2.139)$$

证明 只需证明 E 可测, 则根据 Fubini 定理可以得到乘积关系. 取 G_δ 集 $F_1 \supset E_1, F_2 \supset E_2$ 使得 $F_1 - E_1, F_2 - E_2$ 零测, 断言 $F_1 \times F_2$ 也为 G_δ 集 (表示为开集交, 合并即得), 则

$$m_*(F_1 \times F_2 - E_1 \times E_2) \leq m_*(F_1 - E_1)m_*(F_2 - E_2) = 0, \quad (2.140)$$

故 $E_1 \times E_2 = E$ 可测.

推论 2.8

设 f 为 $\mathbb{R}^{d_1}$ 中的可测函数, 则 $\tilde{f}(x, y) = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中可测.

证明 注意到 $\{\tilde{f} > a\} = \{f > a\} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 即得.

推论 2.9

设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 中的非负函数, 定义

$$A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x)\} = \{y \geq 0\} \cap \{y \leq f(x)\}, \quad (2.141)$$

则 f 可测当且仅当 A 可测, 该条件满足时有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = m(A). \quad (2.142)$$

证明 设函数 $F(x, y) = y - f(x)$, 若 f 可测则 F 可测, 因此 $\{F \leq 0\} = \{y \leq f(x)\}$ 为可测集, 进而 A 可测.

反之设 A 可测, 则 A^y 几乎个个可测, 因此对任意 $a \geq 0$, 取 $a_n \nearrow a$, 使得 $A^{a_n} = \{f \geq a_n\}$ 可测, 则 $\{f \geq a_n\} \searrow \{f \geq a\}$ 可测, 即 f 可测. 进一步由于 $f(x) = m(A_x)$, 根据 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = m(A). \quad (2.143)$$

上面的定理可以得到一个推论: 若 f 可测, 则 $\Gamma = \{F = 0\}$ 为零测集 (同样利用 Fubini 定理).

命题 2.14

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, 定义 $\tilde{E} = \{(x, y) : x - y \in E\} \subset \mathbb{R}^{2d}$, 则 $\tilde{E}$ 可测.

证明 证法 1: 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ & I_n \end{pmatrix}, \quad (2.144)$$

设

$$\tilde{E}' = \{(x', y') \in \mathbb{R}^{2d} : (x', y')^T = A(x, y)^T, (x, y) \in \tilde{E}\} = \{(x - y, y) : (x, y) \in \tilde{E}\}, \quad (2.145)$$

由于 $\tilde{E} = \{(x, y) : x - y \in E\}$, 因此

$$\tilde{E}' = \{(x', y') : x' \in E\} = E \times \mathbb{R}^d, \quad (2.146)$$

因此 $\tilde{E}'$ 可测, 故 $\tilde{E}$ 可测.

证明 证法 2 (Stein): 断言若 E 为开集, 则 $\tilde{E}$ 为开集, 显然可测; 若 E 为 G_δ 集, 则 $\tilde{E}$ 也为 G_δ 集. 若 E 为零

测集, 则取 G_δ 集 $G \supset E$, 易知 $\tilde{G} \supset \tilde{E}$ 且 $\tilde{G}$ 可测, 取紧集 $B_k = \{|y| < k\}$, 利用 Tonelli 定理可得

$$m(\tilde{G} \cap B_k) = \int_{B_k} \chi_{\tilde{G}} \quad (2.147)$$

$$= \int_{B_k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\tilde{G}}^y(x) dx \right) dy \quad (2.148)$$

$$= \int_{B_k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_G(x-y) dx \right) dy \quad (2.149)$$

$$= m(G)m(B_k) \quad (2.150)$$

$$= 0 \quad (2.151)$$

由于 $\tilde{G} \cap B_k \not\supset \tilde{G}$, 故 $\tilde{G}$ 零测, 即得 $\tilde{E}$ 零测.

综上, 一般可测集 E 可分解为 G_δ 集与零测集的并, 故命题成立.

推论 2.10

若 $f(x)$ 可测, 则函数 $\tilde{f}(x, y) = f(x-y)$ 可测.



证明 f 可测说明 $E_a = \{f > a\}$ 可测, 则根据上述命题有

$$\{\tilde{f} > a\} = \{(x, y) : x - y \in E_a\} \quad (2.152)$$

可测, 得证.

2.4 Fourier 变换的简单讨论

对于函数 f , 可以定义其 Fourier 变换与逆变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad (2.153)$$

如今借助 Lebesgue 积分理论, 可以很方便地讨论其基本性质.

命题 2.15

若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中连续有界.



证明 放缩可得有界性: $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$, 另外由于

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} = f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}, \quad |f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| \leq |f(x)|, \quad (2.154)$$

根据控制收敛定理可得

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi_0} dx = \hat{f}(\xi_0), \quad (2.155)$$

故 $\hat{f}$ 连续.

尽管 $\hat{f}$ 有许多良好的性质, 但它未必处于 L^1 空间中, 为了讨论 Fourier 逆变换公式, 可以给出如下定理:

定理 2.9

若 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则 Fourier 逆变换公式几乎处处成立.



推论 2.11

若 $\hat{f}(\xi) \equiv 0$, 则 $f = 0, a.e..$



为了证明上述定理, 首先给出一个引理.

引理 2.6 (乘积公式)

若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx. \quad (2.156)$$

证明 设 $F(\xi, y) = g(\xi)f(y)e^{-2\pi i y \cdot \xi}$, 则 $F(\xi, y) \in L^1$, 首先根据 Tonelli 定理有

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |F| = \int_{\mathbb{R}^d} |g(\xi)|d\xi \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy = \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1} < \infty, \quad (2.157)$$

故 $F \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$, 因此再根据 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(\xi, y)dy \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(\xi, y)d\xi \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

下面证明反演公式, 考虑函数 $K_\delta(x) = \delta^{-d/2}e^{-\pi|x|^2/\delta}$, $\delta > 0$, 则简单计算可得

$$\widehat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta|\xi|^2}, \quad \widehat{\widehat{K}}_\delta(x) = K_\delta(x) \quad (2.158)$$

这里的 K_δ 是一个“好核”, 即其满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(y)dy = 1, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{|y|>\eta} K_\delta(y)dy = 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.159)$$

并且根据 Fourier 变换的平移性质可知

$$g(\xi) = e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{K}_\delta(\xi) \longmapsto K_\delta(x - y), \quad (2.160)$$

因此根据乘积公式有

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)K_\delta(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{2\pi i x \cdot \xi}d\xi, \quad (2.161)$$

若 $\hat{f} \in L^1$, 则借助控制收敛定理, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时右式收敛于

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi}d\xi, \quad (2.162)$$

接着考虑左式, 设差值

$$\Delta_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K_\delta(x - y)dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x - y) - f(x))K_\delta(y)dy, \quad (2.163)$$

$$|\Delta_\delta(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)|K_\delta(y)dy, \quad (2.164)$$

对 x 积分, 并使用 Tonelli 定理可得

$$\|\Delta_\delta\| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f_y - f\|K_\delta(y)dy, \quad (2.165)$$

其中 $f_y(x) = f(x - y)$, 根据平移函数在 L^1 中的连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可取 $\eta > 0$ 使得对任意 $|y| < \eta$ 都有 $\|f_y - f\| < \varepsilon$, 则

$$\|\Delta_\delta\| \leq \varepsilon + \int_{|y|>\eta} \|f_y - f\|K_\delta(y)dy \leq \varepsilon + 2\|f\| \int_{|y|>\eta} K_\delta(y)dy, \quad (2.166)$$

由于 $\|f\| < \infty$, 因此合理选择 δ 可使得第二项小于 ε , 即得

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\Delta_\delta\| = 0, \quad (2.167)$$

根据 Riesz-Fischer 定理, Δ_δ 存在子列 Δ_{δ_n} 几乎处处收敛到 0, 也就是说几乎处处 x 有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K_{\delta_n}(x - y)dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{-\pi\delta_n|\xi|^2}e^{2\pi i x \cdot \xi}d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi}d\xi. \quad (2.168)$$

得证.

第3章 微分与积分

3.1 积分的微分

考虑 $[a, b]$ 上的可积数 f , 令

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \quad a \leq x \leq b, \quad (3.1)$$

一个自然的问题是是否有 $F'(x) = f(x)$, 根据导数的定义可得

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy = \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy, \quad (3.2)$$

这里 $I = (x, x+h)$, 上面的积分实际上表示 f 在 I 中的平均值, 我们期望在区间充分小时有

$$\lim_{|I| \rightarrow 0, x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy = f(x). \quad (3.3)$$

这种表示可以轻松推广到高维, 只需将 I 替换为球 B , 即

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0, x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x)?, \quad (3.4)$$

上述问题称为**平均问题**, 其中 $m(B) = v_d r^d$, r 为球半径, v_d 为单位球体积测度. 如果 f 在 x 处连续, 那么可以得到非常好的结果: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|x - y| < \delta$ 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 因此

$$\left| f(x) - \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy \right| \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad (3.5)$$

此时上面的猜测显然成立, 事实上, 对于一般的情形亦然, 下面来讨论这一问题.

3.1.1 Hardy-Littlewood 极大函数

定义 3.1 (极大函数)

若 f 可积, 则定义其极大函数为

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy, \quad (3.6)$$

其中 B 为包含 x 的球.



下面考虑一些极大函数的性质:

定理 3.1

设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 则

1. f^* 可测.
2. f^* 几乎处处有限.
3. 对任意 $\alpha > 0, A = 3^d$, f^* 满足

$$m(\{f^* > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1}. \quad (3.7)$$



上面第 3 条中的不等式被称为“弱形式” (weak-type), 因为它弱于 L^1 空间中的 Chebychev 不等式, 即

$$m(\{|g| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \|g\|_{L^1}. \quad (3.8)$$

不过弱形式中的常数 A 通常无关紧要, 因为它只与维数有关.

证明 1. 设 $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$, 若 $x \in E_\alpha$, 则存在某个包含 x 的开球 B 使得

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy > \alpha, \quad (3.9)$$

因此对任何 $x' \in B$ 都有

$$f^*(x') \geq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy > \alpha, \quad (3.10)$$

即 $x' \in E_\alpha$, E_α 为开集, f^* 可测.

2. 根据 3, 令 $\alpha \rightarrow \infty$ 可知 $m(\{f = \infty\}) = 0$.

上面第三条的证明需要用到一个初等版本的 Vitali 覆盖定理, 考虑如下引理

引理 3.1

设 $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的有限开球族, 则其中存在不相交的球 $B_{i_1}, \dots, B_{i_j}$ 使得

$$m\left(\bigcup_{l=1}^n B_l\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) = \sum_{j=1}^k m(3B_{i_j}). \quad (3.11)$$



定理的证明基于这样的观察: 设 B, B' 为两个相交球, 若 $r_B > r_{B'}$, 则 B' 可以被与 B 同心, 半径为 $3r_B$ 的球覆盖.

证明 首先取半径最大的球 B_{i_1} , 设其半径放大 3 倍的同心球为 $\tilde{B}_{i_1}$, 删去所有与 B_{i_1} 相交的球, 因为它们都被包含在 $\tilde{B}_{i_1}$ 中. 重复这一操作, 则可以得到无交球列 $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$, 且它们放大后的球覆盖 $\mathcal{B}$, 因此

$$\bigcup_{l=1}^n B_l \subset \bigcup_{j=1}^k \tilde{B}_{i_j} \implies m\left(\bigcup_{l=1}^n B_l\right) \leq \sum_{j=1}^k m(\tilde{B}_{i_j}) = 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}). \quad (3.12)$$

下面证明前述定理中的弱 1-1 型不等式.

证明 [弱 1-1 型不等式] 设 $E_\alpha = \{f^* > \alpha\}$, 则对任意 $x \in E_\alpha$, 存在包含 x 的球 B_x 满足

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha, \quad m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy. \quad (3.13)$$

取定紧集 $K \subset E_\alpha$, 由于 $K \subset \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$, 因此存在有限子覆盖 $K \subset \bigcup_{l=1}^n B_l$, 根据前面的引理, 可以取不相交的 $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ 使得

$$m\left(\bigcup_{l=1}^n B_l\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}), \quad (3.14)$$

因此

$$m(K) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^k \int_{B_{i_j}} |f| = \frac{A}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}} |f| \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1}, \quad (3.15)$$

根据 K 的任意性, 得证.

3.1.2 Lebesgue 微分定理

定理 3.2 (Lebesgue 微分定理)

若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 则

$$f(x) = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy, \quad a.e. \quad (3.16)$$



证明 只需证明, 对任意 $\alpha > 0$, 下面的集合零测:

$$E_\alpha = \left\{ x : \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x) \right| > 2\alpha \right\}, \quad (3.17)$$

固定 α , 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在紧支集连续函数 g 满足

$$\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon, \quad (3.18)$$

注意到

$$\left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x) \right| \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - g(y)| + \frac{1}{m(B)} \left| \int_B g(y) dy - g(x) \right| \quad (3.19)$$

$$+ |g(x) - f(x)|, \quad (3.20)$$

两边取上极限可得

$$\limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0, \\ x \in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x) \right| \leq (f - g)^*(x) + |f(x) - g(x)|, \quad (3.21)$$

若令

$$A_\alpha = \{x : (f - g)^*(x) > \alpha\}, \quad B_\alpha = \{x : |f(x) - g(x)| > \alpha\}, \quad (3.22)$$

则容易发现 $E_\alpha \subset A_\alpha \cup B_\alpha$, 借助 Chebychev 不等式以及弱 1-1 型不等式可得

$$m(E_\alpha) \leq m(A_\alpha) + m(B_\alpha) \quad (3.23)$$

$$\leq \frac{A+1}{\alpha} \|f - g\|_{L^1} \quad (3.24)$$

$$\leq \frac{A+1}{\alpha} \varepsilon, \quad (3.25)$$

根据 ε 任意性可知 $m(E_\alpha) = 0$, 得证.

前文的许多讨论都以“可积”为出发点, 而函数的可积性是一个全全局概念, 而微分只需要考虑点 x 邻域内包含 x 的球即可, 因此可以定义**局部可积**的概念.

定义 3.2 (局部可积)

称 f 在 $\mathbb{R}^d$ 局部可积, 若对任意球 $B \subset \mathbb{R}^d$ 有 $f(x)\chi_B(x)$ 可积, 记为 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

由此可以得到加强版本的 Lebesgue 微分定理.

定理 3.3 (Lebesgue 微分定理)

若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则

$$f(x) = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy, \quad a.e. \quad (3.26)$$

微分定理的首个应用是定义 **Lebesgue 密度**.

定义 3.3 (Lebesgue 密度)

若 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为可测集, $x \in \mathbb{R}^d$, 若

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap E)}{m(B)} = 1, \quad (3.27)$$

则称 x 在 E 中有 Lebesgue 密度.

换句话说, x 满足上述条件当且仅当对任意 $\varepsilon < 1$, 存在包含 x 的球 B 使得 E 覆盖 B 中占比 α 的部分, 即

$$m(B \cap E) \geq \alpha m(B), \quad (3.28)$$

这也可以理解为, x 邻域中的球几乎完全被 E 覆盖. 对示性函数 χ_E 使用微分定理, 可以给出如下结论

推论 3.1

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 可测, 则

1. 几乎所有 $x \in E$ 在 E 中有 Lebesgue 密度.
2. 几乎所有 $x \notin E$ 在 E 中没有 Lebesgue 密度.

证明 显然 $\chi_E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 因此

$$\chi_E(x) = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B \chi_E(y) dy = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap E)}{m(B)}, \quad a.e. \quad (3.29)$$

定义 3.4 (Lebesgue 集)

若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则定义 f 的 Lebesgue 集包含所有 $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ 使得 $f(\bar{x})$ 有限且

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| dy = 0. \quad (3.30)$$



借助 Lebesgue 集可以刻画局部可积函数的连续性, 注意到 f 的所有连续点都包含在其 Lebesgue 集中, 并且当 $\bar{x}$ 在 Lebesgue 集中时有

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(\bar{x}), \quad (3.31)$$

可以给出如下推论

推论 3.2

若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则 $\mathbb{R}^d$ 中几乎所有点都包含在 f 的 Lebesgue 集中, 换句话说几乎处处成立

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| dy = 0. \quad (3.32)$$



证明 对任意 $r \in \mathbb{Q}$, $f - r \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 根据 Lebesgue 微分定理, 存在零测集 E_r 使得对任意 $x \notin E_r$ 有

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r| dy = |f(x) - r|, \quad (3.33)$$

设 $E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} E_r$, 则 $m(E) = 0$, 若 $\bar{x} \notin E$ 且 $f(\bar{x})$ 有限, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $|f(\bar{x}) - r| < \varepsilon$, 因此

$$\limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| dy \leq \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r| dy + |f(\bar{x}) - r| \quad (3.34)$$

$$= 2|f(\bar{x}) - r| \quad (3.35)$$

$$< 2\varepsilon, \quad (3.36)$$

根据 ε 的任意性可知 $\bar{x}$ 在 f 的 Lebesgue 集中, 得证.

前面讨论微分都是通过球中的平均进行逼近, 因此自然会产生问题: 通过其它集族能否得到同样的结果? 对于所有立方体结论同样成立, 对于长方体则不然, 参见教材本章最后一题 (Stein) .

定义 3.5 (规律收缩 (shrink regularly))

一族集合 $\{U_\alpha\}$ 称为在 $\bar{x}$ 处规律收缩 (或 bounded eccentricity), 若存在 $c > 0$, 对任意 U_α , 存在包含 $\bar{x}$ 的球 B 使得

$$U_\alpha \subset B, \quad m(U_\alpha) \geq cm(B). \quad (3.37)$$



注 换句话说, 球与规律收缩的集合的测度之比要有一个正的下界.

容易发现立方体是满足这一性质的, 但矩形则不然 (考虑非常“细”的矩形) .

推论 3.3

设 $f \in L^1_{\text{loc}}$, $\{U_\alpha\}$ 在 $\bar{x}$ 处规律收缩, 则

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha) \rightarrow 0 \\ \bar{x} \in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y) dy = f(\bar{x}) \quad (3.38)$$

对 f 的 Lebesgue 集中的点几乎处处成立.



证明 注意到若 $\bar{x} \in B, U_\alpha \subset B$ 且 $m(U_\alpha) \geq cm(B)$, 则

$$\frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(y) - f(\bar{x})| dy \leq \frac{1}{cm(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})| dy, \quad (3.39)$$

两边取上确界得证.

最后做一些过渡, 考虑球 $B_\delta(0)$ 以及规范化的函数 ($\|\varphi_\delta\|_{L^1} = 1$)

$$\varphi_\delta = \frac{\chi_{B_\delta(0)}}{m(B_\delta(0))}, \quad (3.40)$$

则 $\text{supp } \varphi_\delta = B_\delta(0)$, 对于 $f \in L^1$, 与之做卷积可得

$$f * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \varphi_\delta(y) dy \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{m(B_\delta(0))} \int_{B_\delta(0)} f(x-y) dy \quad (3.42)$$

$$= \frac{1}{m(B_\delta(x))} \int_{B_\delta(x)} f(y) dy, \quad (3.43)$$

这种形式已经非常熟悉, Lebesgue 微分定理说明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f * \varphi_\delta = f, a.e. \quad (3.44)$$

也就是说可积函数与 φ_δ 的卷积可以几乎处处逼近 f , 下一节将进一步讨论这一现象.

3.2 好核与恒同逼近

定义 3.6 (好核)

称一族函数 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为好核, 若

1. $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) dx = 1$.
2. $\|K_\delta\|_{L^1} \leq A < \infty$.
3. 对任意 $\eta > 0$ 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta} |K_\delta(x)| dx = 0. \quad (3.45)$$



下面考虑一些好核的例子.

例 3.1 光滑化子 (Mollifier) 设 φ 为一个非负紧支集光滑函数, 满足 $\|\varphi\|_{L^1} = 1$, 定义

$$\varphi_\delta(x) = \delta^{-d} \varphi(x/\delta), \quad (3.46)$$

则对任意 $\eta > 0$, 当 δ 充分小时有 (这是因为紧支集)

$$\int_{|x| > \eta} \varphi_\delta(x) dx = \int_{|y| > \delta^{-1}\eta} \varphi(y) dy = 0, \quad (3.47)$$

此时对任意 $f \in L^1$ 有

$$f * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \varphi_\delta(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \varphi_\delta(x-y) dy, \quad (3.48)$$

因此 $f * \varphi_\delta$ 是一个光滑函数, 它收敛到 f , 这里的 $\{\varphi_\delta\}$ 称为光滑化子. 这也说明了光滑函数在 L^1 空间中稠密.

例 3.2 热核 (heat kernel) 热核定义为

$$H_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad t > 0, \quad (3.49)$$

考虑热方程

$$\partial_t u - \Delta u = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (3.50)$$

若初值 f 有一些较好的性质, 则热核可以根据 f 给出热方程的解

$$u(x, t) = f * H_t(x) \quad (3.51)$$

例 3.3 上半平面的 Poisson 核 上半平面的 Poisson 核定义为

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.52)$$

这里的参数由 δ 变为 y , 它可以给出上半平面稳态热方程 (Poisson 方程) 的解.

例 3.4 圆盘中的 Poisson 核 圆盘上的 Poisson 核定义为

$$\frac{1}{2\pi} P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}, \quad |x| \leq \pi, \quad (3.53)$$

它可以给出一维稳态热方程的解.

例 3.5 Fejer 核 Fejer 核定义为

$$\frac{1}{2\pi} F_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad (3.54)$$

它可以用来刻画 Fourier 级数的 Cesaro 求和.

好核有许多逼近的性质, 下面来讨论这一内容.

引理 3.2

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为好核, f 连续有界, 则逐点成立 $f * K_\delta \rightarrow f$.



注 事实上, 在有界函数的连续点 x 处也有 $f * K_\delta(x) \rightarrow f(x)$.

证明 根据 f 的连续性, 取定 x , 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 只要 $|y| \leq \eta$ 就有

$$|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon, \quad (3.55)$$

因此

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \quad (3.56)$$

$$\leq \int_{|y| < \eta} |f(x - y) - f(y)| |K_\delta(y)| dy + \int_{|y| \geq \eta} |f(x - y) - f(y)| |K_\delta(y)| dy \quad (3.57)$$

$$\leq A\varepsilon + C \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| dy, \quad (3.58)$$

令 $\delta \rightarrow 0$ 得证.

引理 3.3

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为好核, $f \in L^1$, 则 $f * K_\delta \xrightarrow{L^1} f$.



证明 根据 Fubini 定理可得

$$\|f * K_\delta - f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |f * K_\delta(x) - f(x)| dx \quad (3.59)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy dx \quad (3.60)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)| dx \right) |K_\delta(y)| dy \quad (3.61)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|f - f_y\|_{L^1} |K_\delta(y)| dy, \quad (3.62)$$

由于 $\lim_{y \rightarrow 0} \|f - f_y\|_{L^1} = 0$, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 对任意 $|y| \leq \eta$ 有 $\|f - f_y\|_{L^1} < \varepsilon$, 因此

$$\|f * K_\delta - f\|_{L^1} \leq \int_{|y| < \eta} \|f - f_y\|_{L^1} |K_\delta(y)| dy + \int_{|y| > \eta} \|f - f_y\|_{L^1} |K_\delta(y)| dy \quad (3.63)$$

$$\leq A\varepsilon + 2\|f\|_{L^1} \int_{|y| > \eta} |K_\delta(y)| dy, \quad (3.64)$$

因此当 $\delta \rightarrow 0$ 时上述趋于 0.

为了得到更强的逼近, 需要对好核的条件进一步加强, 由此给出**恒同逼近**的定义

定义 3.7 (恒同逼近)

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为一族函数, 若其满足:

1. $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) dx = 1$.
2. 对任意 $\delta > 0$ 有 $|K_\delta(x)| \leq A\delta^{-d}$.
3. 对任意 $\delta > 0, x \in \mathbb{R}^d$ 有 $|K_\delta(x)| \leq A\delta/|x|^{d+1}$.



注 容易验证恒同逼近都是好核.

对于一般的可积函数, 借助恒同逼近可以给出几乎处处的逼近.

定理 3.4

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为恒同逼近, $f \in L^1$, 则对任意 f 的 Lebesgue 集的点 x 有

$$f * K_\delta(x) \rightarrow f(x), \quad (3.65)$$

也就是说 $f * K_\delta \xrightarrow{a.e.} f$.



证明思路还是考虑放缩

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy, \quad (3.66)$$

只需证明右边趋于 0, 考虑如下引理

引理 3.4

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, x 在 f 的 Lebesgue 集中, 令

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r^d} \int_{|y| \leq r} |f(x-y) - f(x)| dy, \quad r > 0, \quad (3.67)$$

则 $\mathcal{A}$ 连续有界, 且 $\mathcal{A}(r) \rightarrow 0 (r \rightarrow 0)$.



证明 根据 2.3 的绝对连续性可证 $\mathcal{A}$ 的连续性; x 在 f 的 Lebesgue 集中说明 $\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}(r) = 0$ (注意到 $m(B_r(0)) = v_d r^d$), 即 $\mathcal{A}$ 在 $0 < r \leq 1$ 有界, 而当 $r > 1$ 时

$$\mathcal{A}(r) \leq \frac{1}{r^d} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| dy + \frac{1}{r^d} \int_{|y| \leq r} |f(x)| dy \quad (3.68)$$

$$\leq r^{-d} \|f\|_{L^1} + v_d |f(x)|, \quad (3.69)$$

显然有界.

回到定理的证明, 积分可以分解为两部分

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy = \int_{|y| \leq \delta} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k \delta < |y| \leq 2^{k+1} \delta}, \quad (3.70)$$

第一部分可以根据恒同逼近的定义 2 直接放缩

$$\int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \leq \frac{c}{\delta^d} \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| dy \quad (3.71)$$

$$= c\mathcal{A}(\delta), \quad (3.72)$$

第二部分的每一个求和项可以由恒同逼近的定义 3 放缩

$$\int_{2^k\delta < |y| \leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \leq \frac{c\delta}{(2^k\delta)^{d+1}} \int_{|y| \leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)| dy \quad (3.73)$$

$$\leq \frac{c'/2^k}{(2^{k+1}\delta)^d} \int_{|y| \leq 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(y)| dy \quad (3.74)$$

$$\leq c'2^{-k} \mathcal{A}(2^{k+1}\delta), \quad (3.75)$$

综上可得

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq c\mathcal{A}(\delta) + c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \quad (3.76)$$

注意到 $\mathcal{A}$ 有界, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可取充分大的 N 使得 $\sum_{k \geq N} 2^{-k} < \varepsilon$, 再令 δ 足够小, 由 $\mathcal{A}$ 在 0 处的连续性可使

$$\mathcal{A}(2^k\delta) < \frac{\varepsilon}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.77)$$

因此可取充分小的 δ 使得

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq C\varepsilon, \quad (3.78)$$

定理得证.

定理 3.5

设 $\{K_\delta : \delta > 0\}$ 为恒同逼近, $f \in L^1$, 则对任意 $\delta > 0$, $f * K_\delta(x)$ 可积, 且有

$$f * K_\delta \xrightarrow{L^1} f. \quad (3.79)$$

定理的证明与上一章中讨论 Fourier 变换时的操作类似.

3.3 函数的微分

本节讨论这样的问题: 那些函数 F (几乎处处) 可微, 且满足等式

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx, \quad (3.80)$$

下面讨论更大的一类函数: 有界变差函数.

3.3.1 有界变差函数

定义 3.8 (可求长曲线)

设 $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ 为一条平面参数曲线, 其中 x, y 为 $[a, b]$ 上的连续实值函数, 称 γ 是可求长的, 若存在 $M < \infty$ 使得对任意分割 $\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ 有

$$\sum_{k=1}^N |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M. \quad (3.81)$$

定义其长度为

$$L(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_{j=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|. \quad (3.82)$$

注 另一方面, $L(\gamma)$ 也可以看作是满足前一式的 M 的下确界.

上述定义具有非常清楚的几何直观, 这实际上就是在用折线逼近 γ , 用折线的长度逼近 $L(\gamma)$.



图 3.1: 折线逼近

由此自然产生问题: x, y 满足何种解析性质时对应的 γ 可求长? 在微积分中一个熟知的计算公式为

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, \quad (3.83)$$

那么 x, y 是否一定需要可微? 讨论这一问题的关键就是本节的主角: 有界变差函数.

定义 3.9 (有界变差函数)

对于 $[a, b]$ 上的复值函数 F 以及一个分割 $\pi: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, 可以定义 F 关于这一分割的变差为

$$S_\pi = \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})|, \quad (3.84)$$

若 F 对任意分割 π 的变差存在一致的上界 $M < \infty$, 则称 F 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 记为 $f \in BV([a, b])$.



注

1. 有界变差与可求长曲线的定义很像, 但前者并没有要求 F 是连续的.
2. 称分割 π' 为 π 的一个 refinement, 若 F 在 π' 下的变差不小于 π 下的变差.
3. 若固定闭区间 $[a, b]$, 则其上有界变差函数的全体构成一个线性空间.

定理 3.6

曲线 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ 可求长当且仅当 x, y 为有界变差函数.



证明 令 $F(t) = x(t) + iy(t)$, 注意到

$$|F(t_k) - F(t_{k-1})| \leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})| \leq 2|F(t_k) - F(t_{k-1})|. \quad (3.85)$$

事实上, 有界变差函数的振荡不会很大, 考虑下面的例子.

例 3.6 若 F 为实值单调 (递增) 有界函数, 则

$$\sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| = F(b) - F(a) < \infty, \quad (3.86)$$

F 显然为有界变差函数.

例 3.7 若 F 处处可微, F' 有界, 则由中值定理可知存在 $M < \infty$ 使得

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|, \quad (3.87)$$

因此

$$\sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| \leq M(b - a) < \infty, \quad (3.88)$$

此时 F 也为有界变差函数.

上面的条件可以减弱到 **Lipschitz 条件**, 即存在 M 使得对任意 $x, y \in [a, b]$ 有

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|, \quad (3.89)$$

但另一方面, 如果不假设 F' 的有界性, 结论可能不成立.

例 3.8 设 $a, b > 0$, 函数

$$F(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.90)$$

则 F 为有界变差函数当且仅当 $a > b$.

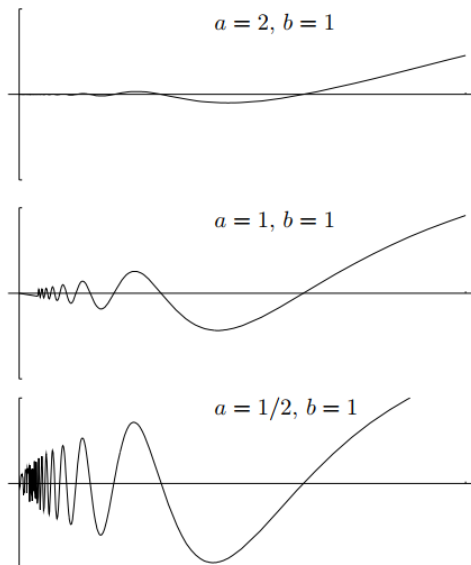


图 3.2: 三种情形

回到上面的第一个例子, 它看起来很简单, 但实际上借助单调函数就能很好地刻画有界变差函数, 首先定义全变差.

定义 3.10 (全变差)

对于函数 f , 定义其在 $[a, x] \subset [a, b]$ 上的全变差为

$$T_f(a, x) = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^N |f(t_k) - f(t_{k-1})|, \quad (3.91)$$

这里 π 为 $[a, x]$ 的分割.



注 易知, f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数当且仅当 $T_f(a, b)$ 有限.

全变差有很强的几何意义, 若将 f 看作一条“曲线”, 则 $T_f(a, b)$ 实际上对应了 f 在 $[a, b]$ 部分的“长度”.

命题 3.1

若 $f \in BV([a, b])$, 则对任意 $c \in [a, b]$ 有

$$T_f(a, c) + T_f(c, b) = T_f(a, b). \quad (3.92)$$



注 上述命题有对应的几何意义: 曲线可以分为两部分, 分别求长度得到总长.

证明 任意 $[a, c], [c, b]$ 的划分可以合并为 $[a, b]$ 上的划分, 因此 $T_f(a, c) + T_f(c, b) \leq T_f(a, b)$; 对任意 $[a, b]$ 的划分 $\pi: a = t_0 < \cdots < t_n = b$, 设 $c \in [t_m, t_{m+1}]$, 则

$$|f(t_{m+1}) - f(t_m)| \leq |f(t_{m+1}) - f(c)| + |f(c) - f(t_m)|, \quad (3.93)$$

故 π 可加细、拆分为 $[a, b], [b, c]$ 上的划分, 即得

$$\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq T_f(a, c) + T_f(b, c), \quad (3.94)$$

对左边取上确界得证.

借助全变差可以立即得到一个很棒的分解:

$$f(x) = T_f(a, x) - (T_f(a, x) - f(x)), \quad (3.95)$$

显然 $T_f(a, x)$ 单调递增, 下面证明另一个也单调递增.

命题 3.2

$T_f(a, x) - f(x)$ 单调递增.

证明 只需证明对任意 $x < y$ 有

$$T_f(a, x) - f(x) \leq T_f(a, y) - f(y) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leq T_f(x, y), \quad (3.96)$$

根据三角不等式, 这是显然的.

推论 3.4

f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 当且仅当 f 可以分解为两个有界单值函数的差.

也就是说, 对于有界变差函数的研究很多时候可以归结到单调函数上.

下面考虑 T_f 的连续性, 首先易知, $T_f(a, x)$ 在 c 处连续当且仅当同时成立

$$\lim_{x \rightarrow c^+} T_f(a, x) = T_f(a, c) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} T_f(c, x) = 0, \quad (3.97)$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} T_f(a, x) = T_f(a, c) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} T_f(x, c) = 0, \quad (3.98)$$

这里考虑了一个与 $T_f(a, x)$ 对称的全变差 $T_f(x, c)$, 而在上面的条件下, 对任意 $\delta > 0$ 有

$$|f(c + \delta) - f(c)| \leq T_f(c, c + \delta), \quad |f(c - \delta) - f(c)| \leq T_f(c - \delta, c), \quad (3.99)$$

令 $\delta \rightarrow 0$ 可得 f 在 c 处的连续性, 事实上, 反过来也是成立的, 考虑如下引理

引理 3.5

设 f 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则 f 在 $c \in [a, b]$ 连续当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow c^+} T_f(c, x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} T_f(x, c) = 0, \quad (3.100)$$

当 c 为端点时, 只考虑单侧极限.

证明 只证明右极限式. 设 f 在 c 处连续, 若 $\lim_{x \rightarrow c^+} T_f(c, x) = \varepsilon > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in (c, c + \delta)$ 有

$$|f(c) - f(x)| < \frac{1}{10}\varepsilon, \quad \frac{9}{10}\varepsilon \leq T_f(c, x) \leq \frac{11}{10}\varepsilon, \quad (3.101)$$

取 $[c, c + \delta]$ 的分割 π 使得

$$S_\pi \geq T_f(c, c + \delta) - \frac{1}{10}\varepsilon \geq \frac{8}{10}\varepsilon, \quad (3.102)$$

则有

$$S_\pi = |f(t_1) - f(c)| + \sum_{k=2}^N |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq \frac{1}{10}\varepsilon + T_f(t_1, c + \delta) \Rightarrow T_f(t_1, c + \delta) \geq \frac{7}{10}\varepsilon, \quad (3.103)$$

$t_1 \in (c, c + \delta)$, 因此根据一开始的估计有

$$\frac{11}{10}\varepsilon \geq T_f(c, c + \delta) = T_f(c, t_1) + T_f(t_1, c + \delta) \geq \frac{9}{10}\varepsilon + \frac{7}{10}\varepsilon = \frac{16}{10}\varepsilon, \quad (3.104)$$

矛盾, 故 $\varepsilon = 0$.

回到曲线的情形, 设 γ 为 $[a, b]$ 上的可求长曲线, 则对任意 $A \leq B \in [a, b]$ 可定义长度函数 $L(A, B) = T_F(A, B)$, 这里 $F(t) = x(t) + iy(t)$, 则对任意 $C \in [A, B]$ 有

$$L(A, C) + L(C, B) = L(A, B). \quad (3.105)$$

事实上, 这里定义的函数 L 关于 A, B 都是连续的, 这根据前面的引理立得, 但是这里还是给出一个书上的证明.

首先证明第二个变量的连续性, 取 $[A, B]$ 的分割 $\pi: A = t_0 < \cdots < t_N = B$ 使得

$$S_\pi \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| \geq L(A, B) - \varepsilon/2, \quad (3.106)$$

根据 F 的连续性, 只要 B_1 与 B 充分接近就有

$$|F(B_1) - F(B)| < \varepsilon/2, \quad (3.107)$$

考虑分割 $\pi': A = t_0 < \cdots < t_{N-1} < B_1$ (并记分点为 $s_0, \cdots, s_N = B_1$), 则

$$\sum_{k=1}^N |F(s_k) - F(s_{k-1})| = \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| + |F(B_1) - F(t_{N-1})| - |F(B) - F(t_{N-1})| \quad (3.108)$$

$$\geq \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| - |F(B_1) - F(B)| \quad (3.109)$$

$$\geq L(A, B) - \varepsilon, \quad (3.110)$$

由此可得 $L(A, B_1) \geq L(A, B) - \varepsilon$, 即 L 关于 B 左连续, 右连续的证明是类似的, 对于另一个分量亦然.

下面的定理是微分学的一个重要结论.

定理 3.7

若 F 为 $[a, b]$ 上的有界变差函数, 则 F 几乎处处可微.



由于有界变差函数可以分解为两个单调函数的差, 因此只需证明单调函数几乎处处可微.

定理 3.8 (Lebesgue)

设 f 为 $[a, b]$ 上的单增函数, 则

1. f' 几乎处处存在.
2. f' 可以看作 $[a, b] \rightarrow [0, +\infty]$ 的函数, f' 可积, 且有

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a). \quad (3.111)$$

3. f' 几乎处处有限.



作为准备工作, 下面考虑一些覆盖定理.

小的补充

最后补充一点, 有界变差函数的单调分解并不是唯一的, 也可以通过正/负变差进行分解, 对于实值函数 F , 可以定义其正/负变差为

$$P_F(a, x) = \sup_{(+)} \sum [F(t_k) - F(t_{k-1})], \quad N_F(a, x) = \sup_{(-)} \sum -[F(t_k) - F(t_{k-1})] \quad (3.112)$$

即分别取使得 $F(t_k) \geq F(t_{k-1}), F(t_k) \leq F(t_{k-1})$ 成立的 $[t_{k-1}, t_k]$, 再对所有分割取上确界.

引理 3.6

设 F 为 $[a, b]$ 上的实值有界变差函数, 则对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$F(x) - F(a) = P_F(a, x) - N_F(a, x), \quad (3.113)$$

$$T_F(a, x) = P_F(a, x) + N_F(a, x). \quad (3.114)$$



证明 根据上确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 $\pi: a = t_0 < \dots < t_N = x$ 满足

$$\left| P_F(a, x) - \sum_{(+)} [F(t_k) - F(t_{k-1})] \right| < \varepsilon, \quad \left| N_F(a, x) - \sum_{(-)} -[F(t_k) - F(t_{k-1})] \right| < \varepsilon \quad (3.115)$$

注意到

$$F(x) - F(a) = \sum_{(+)} F(t_k) - F(t_{k-1}) - \sum_{(-)} -[F(t_k) - F(t_{k-1})], \quad (3.116)$$

因此有

$$|[F(x) - F(a)] - [P_F(a, x) - N_F(a, x)]| < 2\varepsilon, \quad (3.117)$$

第一条得证. 注意到

$$\sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| = \sum_{(+)} F(t_k) - F(t_{k-1}) + \sum_{(-)} -[F(t_k) - F(t_{k-1})], \quad (3.118)$$

两边取上确界有 $T_F \leq P_F + N_F$, 如果只对左边取上确界可得

$$\sum_{(+)} F(t_k) - F(t_{k-1}) + \sum_{(-)} -[F(t_k) - F(t_{k-1})] \leq T_F(a, x), \quad (3.119)$$

再对左边依次取上确界即得 $P_F + N_F \leq T_F$, 得证.

对于有界变差函数 F , 若令

$$F_1(x) = F(a) + P_T(a, x), \quad F_2(x) = N_T(a, x), \quad (3.120)$$

则 $F = F_1 - F_2$, 且 F_1, F_2 均为有界单增函数, 这就给出了另一种单调分解.

3.3.2 Vitali 覆盖定理

在证明 Hardy-Littlewood 极大函数的弱型不等式时, 我们曾证明过这样的覆盖定理:

定理 3.9 (有限覆盖定理)

设 F 为 $\mathbb{R}^d$ 上的有限开球族, 则存在子族 $G \subset F$ 使得

$$\bigcup_{B \in F} B \subset \bigcup_{B \in G} 3B. \quad (3.121)$$



其证明思路是不断取最大球, 扩大并删去一些小球, 其中的系数 "3" 来自于一个几何上的观察, 也即如下引理

引理 3.7

设球 $B \cap B' \neq \emptyset, r(B') \leq Lr(B)$, 则 $B' \subset (2L + 1)B$.



证明 画图, 根据三角不等式可得.

下面考虑一个无穷情形的覆盖定理.

定理 3.10 (无穷覆盖引理)

设 F 为无穷开球族, 半径一致小于 $R < \infty$, 则存在子族 G 使得

$$\bigcup_{B \in F} B \subset \bigcup_{B \in G} 5B. \quad (3.122)$$



注 这里的系数 5 可以优化为 $3 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

证明 令

$$F_n = \{B \in F : R/2^n < r(B) \leq R/2^{n-1}\}, \quad (3.123)$$

下面分三步构造出所需子族.

Step 1. 根据 Zorn 引理, 取 $G_1 \subset F_1$, 这里 G_1 为 F_1 中所有不相交球子集的极大元.

Step 2. 设已选出了 $G_i \subset F_i, 1 \leq i \leq n-1$, 定义

$$H_n = \{B \in F_n : B \cap B' = \emptyset, \forall B' \in \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i\}, \quad (3.124)$$

取 $G_n \subset H_n$, 这里 G_n 为 F_n 中所有不相交球子集的极大元.

下证 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ 满足要求, 显然其中球两两不相交, 对任意 $B \in F_n$, 分如下情况讨论

1. 若 $B \notin H_n$, 则存在 $B' \in \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i$ 使得 $B \cap B' \neq \emptyset$, 而 $r(B) \leq r(B')$, 由上一条引理可知 $B \subset 3B'$.
2. 若 $B \in G_n$, 则 $B \subset B$.
3. 若 $B \in H_n, B \notin G_n$, 则存在 $B' \in G_n$ 使得 $B' \cap B \neq \emptyset$, 根据 F_n 的划分有 $r(B) \leq 2r(B')$, 因此 $B \subset 5B'$.

定义 3.11 (Vitali 覆盖)

给定子集 $E \subset \mathbb{R}^d$, 称闭球族 F 为 E 的一个 Vitali 覆盖, 若对任意 $x \in E, \varepsilon > 0$, 存在 $B \in F$ 使得 $x \in B$ 且 $r(B) < \varepsilon$.



直观而言, Vitali 覆盖是指 E 的任一点都有半径任意小的圆盘覆盖.

引理 3.8 (Vitali 覆盖引理)

设 F 为集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 的 Vitali 覆盖, 则存在无交球构成的子族 $G \subset F$ 几乎处处覆盖 E , 也即

$$m_* \left(E - \bigcup_{B \in G} B \right) = 0. \quad (3.125)$$



注 该定理对 E 的可测性没有要求.

证明 根据 Vitali 覆盖的定义, 可不妨设 F 中的球半径不超过 1, 根据无穷覆盖引理, 存在子族 $G \subset F$ 满足对应的覆盖性质, 只需证明对任意 $R > 0$ 有

$$m_* \left(B_R(0) \cap \left(E - \bigcup_{B \in G} B \right) \right) = 0, \quad (3.126)$$

则取 R 为正整数, 根据外测度的可数次可加性可知所求外测度为 0.

定义 $G' = \{B \in G : B \cap B_R(0) \neq \emptyset\}$, 则对任意 $B \in G'$ 有 $B \subset B_{R+2}(0)$, 根据 G 中球的无交性可得

$$m \left(\bigcup_{B \in G'} B \right) \leq m(B_{R+2}(0)) < \infty, \quad (3.127)$$

对任意 $\delta > 0$, 考虑

$$G'_1 = \{B \in G' : r(B) \geq \delta\}, \quad G'_2 = G' - G'_1, \quad (3.128)$$

则 $|G'_1| < \infty$ (其中所有球有界无交, 数量有限), 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 (对应的 G'_1, G'_2)

$$m(G'_2) = \sum_{B \in G'_2} m(B) < \varepsilon, \quad (3.129)$$

同时 $K = \bigcup_{B \in G'_1} B$ 为紧集, 则对任意 $x \in B_R(0) \cap (E - \bigcup_{B \in G} B)$, 由 Vitali 覆盖的定义知存在 $B \in F$ 使得

$$x \in B \subset B_R(0), \quad B \cap K = \emptyset, \quad (3.130)$$

进一步存在 $B' \in G$, 使得

$$B' \cap B \neq \emptyset, \quad B \subset 5B', \quad (3.131)$$

由于 $B' \cap B_R(0) \neq \emptyset$ (因为 $B \subset B_R(0)$, B, B' 有交), 因此 $B' \in G' = G'_1 \sqcup G'_2$, 而 $B' \cap K = \emptyset$ 说明 $B' \in G'_2$, 因此 G'_2 中的五倍球构成了 $B_R(0) \cap (E - \bigcup_{B \in G} B)$ 的覆盖, 计算外测度有

$$m_* \left(B_R(0) \cap (E - \bigcup_{B \in G} B) \right) \leq \sum_{B \in G'_2} m(5B) < 5^d \varepsilon, \quad (3.132)$$

根据 ε 的任意性得证.

推论 3.5

设 $m_*(E) < \infty$, F 为 E 的 Vitali 覆盖, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在无交球构成的有限子族 G 使得

$$m \left(E - \bigcup_{B \in G} B \right) < \varepsilon. \quad (3.133)$$



证明 存在开集 $U \supset E$ 使得 $m(U) \leq m_*(E) + 1 < \infty$, 定义 $F' = \{B \in F : B \subset U\}$, 则 F' 也是 E 的一个 Vitali 覆盖 (刚开始), 根据 Vitali 覆盖引理, 存在无交球族 $G' \subset F'$ 使得 $m_*(E - \bigcup_{B \in G'} B) = 0$, 且存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sum_{B \in G', r(B) < \delta} m(B) < \varepsilon, \quad (3.134)$$

定义 $G = \{B \in G' : r(B) \geq \delta\}$, 由于

$$E \cap G_1^c = (E \cap G_1^c \cap G_2^c) \sqcup (E \cap G_1^c \cap G_2) \subset (E - (G_1 \cup G_2)) \sqcup (E \cap G_2) \quad (3.135)$$

上面 G_1, G_2 分别表示 $G, G' - G$ 中所有球之并, 因此

$$m_* \left(E - \bigcup_{B \in G} B \right) \leq m_* \left(E - \bigcup_{B \in G'} B \right) + m_* \left(E \cap \bigcup_{B \in G', r(B) < \delta} B \right) \leq 0 + \varepsilon, \quad (3.136)$$

得证.

下面回到 Lebesgue 微分定理.

定理 3.11 (Lebesgue)

设 f 为 $[a, b]$ 上的单增函数, 则

1. f' 几乎处处存在, 几乎处处有限.
2. f' 可测, 可积且

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a). \quad (3.137)$$



$1 \Rightarrow 2$ 可定义 $f_n(x) = n(f(x + 1/n) - f(x))$ (若 $x + 1/n > b$ 则取 $f(x + 1/n) = f(b)$), 则 f_n 几乎处处收敛到 f' , 故 f 可测, 由 Fatou 引理可知

$$\int_a^b f' \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \int_a^b (f(x + 1/n) - f(x)) dx \leq f(b) - f(a). \quad (3.138)$$

因此只需证明 1. 对于函数 f , 其在一点的导数 (若存在) 定义为

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (3.139)$$

仿照借助上下极限研究极限的存在性, 这里引入 Dini 导数来讨论 f 在某一点导数的存在性.

定义 3.12 (Dini 导数)

记 $\Delta_h f = (f(x+h) - f(x))/h$, 定义

$$D^+ f = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \Delta_h f, \quad D_+ f = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \Delta_h f, \quad (3.140)$$

$$D^- f = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \Delta_h f, \quad D_- f = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \Delta_h f, \quad (3.141)$$

分别称为 f 在一点的右上/下导数, 左上/下导数.

**注**

1. 显然 $D_+ f \leq D^+ f, D_- f \leq D^- f$.
2. 若 $D_+ f = D^+ f = D_- f = D^- f$, 则 f' 存在.

下面证明 Lebesgue 微分定理的第一条.

定义

$$E_1 = \{D^+ f > D_- f\}, \quad E_2 = \{D^- f > D_+ f\}, \quad (3.142)$$

则对 $x \in (E_1 \cup E_2)^c$, 有

$$D^+ f \leq D_- f \leq D^- f \leq D_+ f \leq D^+ f, \quad (3.143)$$

即 f 可微, 下证 E_1, E_2 均零测. 作可数分解

$$E_1 = \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}} \{D^+ f > r > s > D_- f\} = \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}} A_{r,s} \quad (3.144)$$

下证每个 $A = A_{r,s}$ 均为零测集, 固定 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset A$ 使得

$$m(U) \leq (1 + \varepsilon)m_*(A), \quad (3.145)$$

对任意 $x \in A$ 有 $D_- f < s$, 因此存在序列 $h_x^i \rightarrow 0^+$ 使得

$$\frac{f(x - h_x^i) - f(x)}{-h_x^i} < s \Leftrightarrow f(x) - f(x - h_x^i) < s h_x^i, \quad (3.146)$$

令

$$F = \{[x - h_x^i, x] \subset U : x \in A, \{h_x^i\}\}, \quad (3.147)$$

则 F 是 A 的 Vitali 覆盖, 根据 Vitali 覆盖引理的推论, 存在有限无交区间

$$\bigcup_{i=1}^n [x_i - h_i, x_i] \subset F, \quad m_* \left(A - \bigcup_{i=1}^n [x_i - h_i, x_i] \right) < \varepsilon, \quad (3.148)$$

进而可得

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - h_i)) < s \sum_{i=1}^n h_i \leq sm(U) \leq s(1 + \varepsilon)m_*(A), \quad (3.149)$$

令 $B = A \cap \bigcup_{i=1}^n (x_i - h_i, x_i)$, 对任意 $y \in B$, 由于 $D^+ f > r$, 因此存在序列 $l_y^i \rightarrow 0^+$ 使得

$$f(y + l_y^i) - f(y) > r l_y^i, \quad (3.150)$$

令

$$F' = \{[y, y + l_y^j] \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i - h_i, x_i) : y \in B, \{l_y^j\}\}, \quad (3.151)$$

则 F' 为 B 的一个 Vitali 覆盖, 即存在无交区间

$$\bigcup_{j=1}^m [y_j, y_j + l_j] \subset F', \quad m_* \left(B - \bigcup_{j=1}^m [y_j, y_j + l_j] \right) < \varepsilon, \quad (3.152)$$

因此

$$\sum_{j=1}^m (f(y_j + l_j) - f(y_j)) > r \sum_{j=1}^m l_j > r(m_*(B) - \varepsilon) > r(m_*(A) - 2\varepsilon), \quad (3.153)$$

而 $[y_j, y_j + l_j] \subset (x_i - h_i, x_i)$, 因此由 f 的单调性可得

$$LHS \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_i - h_i)) \leq s(1 + \varepsilon)m_*(A), \quad (3.154)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可得

$$sm_*(A) \geq rm_*(A), \quad (3.155)$$

$s < r$ 说明 $m_*(A) = 0$, 得证.

上面是单调函数的结论, 下面回到有界变差函数.

推论 3.6

设 $f \in BV([a, b])$, 则 f' 几乎处处存在, 且

$$\int_a^b |f'| \leq T_f(a, b). \quad (3.156)$$



证明 作单调分解 (容易验证)

$$f(x) = T_f(a, x) - (T_f(a, x) - f(x)) \quad (3.157)$$

$$= \frac{1}{2}(T_f(a, x) + f(x)) - \frac{1}{2}(T_f(a, x) - f(x)) \quad (3.158)$$

$$= f_1(x) - f_2(x), \quad (3.159)$$

自然 f' 几乎处处存在, 由三角不等式有 (注意到 f'_1, f'_2 非负)

$$\int_a^b |f'| \leq \int_a^b |f'_1| + |f'_2| = \int_a^b f'_1 + \int_a^b f'_2 \leq (f_1(b) - f_1(a)) + (f_2(b) - f_2(a)) = T_f(a, b). \quad (3.160)$$

回到一开始的问题, 哪些函数满足微积分基本定理 (N-L 公式), 即

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a), \quad (3.161)$$

已经证明单调函数不满足这一等式, 那么连续函数是否满足这一结论? 考虑如下反例.

定义 3.13 (Cantor-Lebesgue 函数)

对于 Cantor 集 $\mathcal{C}$, 定义

$$F : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1] \quad (3.162)$$

$$F(x) = F\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k/2}{2^k}, \quad (3.163)$$

$x \in \mathcal{C}$ 当且仅当 x 的三进制数码只有 0, 2, 因此这样的定义是良好的, 再将这一定义延拓到 $[0, 1]$ 上, 注意到 $[0, 1] - \mathcal{C} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, 注意到 $F(a_i) = F(b_i)$, 因此定义

$$F(x) = a_i, \quad \forall x \in (a_i, b_i), \quad (3.164)$$

如上定义的函数 $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 被称为 Cantor-Lebesgue 函数.



注 容易验证 F 连续且单调递增, $F(0) = 0, F(1) = 1$.

注意到 F' 在 $[0, 1] - \mathcal{C}$ 中为 0, 而 $\mathcal{C}$ 为零测集, 因此

$$\int_0^1 F' = 0 \neq 1 = F(1) - F(0). \quad (3.165)$$

3.3.3 绝对连续函数

定义 3.14 (绝对连续函数)

称 f 为 $[a, b]$ 上的绝对连续函数 (记为 $f \in AC([a, b])$), 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对于 $[a, b]$ 中互不相交的区间

$$I_k = (a_k, b_k), 1 \leq k \leq n, \quad \sum_{k=1}^n |I_k| < \delta, \quad (3.166)$$

有

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \quad (3.167)$$



注

1. 考虑 $[x, x + \delta]$ 可知绝对连续函数必为连续函数.
2. 绝对连续必为有界变差: 对任意 $[a', b'] \subset [a, b], b' - a' < \delta$, 根据绝对连续的定义可知 $T_f(a', b') < \varepsilon$. 因此取 $\varepsilon = 1$, 存在 δ , 将 $[a, b]$ 分解为若干个长度小于 δ 的区间, 则 $T_f(a, b)$ 就能被控制住.
3. 所有 $[a, b]$ 上的绝对连续函数构成一个线性空间.
4. 绝对连续性中的区间个数可以加强到可数, 因为每次只需考虑有限个求和, 根据任意性可得估计.

例 3.9 Lipschitz 函数必为绝对连续函数, 因为这一类函数可以通过区间长度控制取值:

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq M \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) = M \sum_{k=1}^n |I_k|. \quad (3.168)$$

例 3.10 若 $g \in L^1([a, b])$, 则 $f(x) = \int_a^x g$ 为绝对连续函数, 因为

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{a_k}^{b_k} g \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |g| = \int_{\bigcup_{k=1}^n I_k} |g|, \quad (3.169)$$

当 $\sum_{k=1}^n |I_k|$ 充分小时, 上面积分可以充分小 (积分的绝对连续性).

绝对连续函数有我们想要的性质.

定理 3.12

若 $f \in AC([a, b])$, 则

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a). \quad (3.170)$$



为证明上面的结论, 需要考虑两个附加结论: f' 几乎处处存在且在 $[a, b]$ 可积, 前者可以通过有界变差函数的条件得到, 后者先考虑如下引理.

引理 3.9

设 $f \in AC([a, b])$, 则 $f' = 0, a.e.$ 当且仅当 f 在 $[a, b]$ 为常数.



证明 只需证明 $f(a) = f(b)$, 而后对任意 $[a, x] \subset [a, b]$ 使用这一结论即可.

根据条件, 存在 $E \subset [a, b], m(E) = b - a$ 且在 E 中 $f' = 0$, 因此对任意 $\delta > 0, x \in E$, 存在 $\eta_x > 0$ 使得对任意包含 x 的 $[a_x, b_x]$, 当其长度 $b_x - a_x \leq \eta_x$ 时都有

$$|f(b_x) - f(a_x)| \leq \delta(b_x - a_x), \quad (3.171)$$

因此 $F = \{[a_x, b_x] : x \in [a, b], b_x - a_x \leq \eta_x\}$ 是 E 的 Vitali 覆盖, 根据 Vitali 覆盖引理, 存在互不相交的区间 $I_i = [a_i, b_i] \in F$ 使得

$$m\left(E - \bigcup_{i=1}^n I_i\right) < \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^n |I_i| \geq m(E) - m\left(E - \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \geq m(E) - \varepsilon = b - a - \varepsilon, \quad (3.172)$$

因此

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \delta \sum_{i=1}^n |I_i| = \delta(b-a), \quad (3.173)$$

并且 $E' = [a, b] - \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigsqcup_{j=1}^m I'_j$, 其中 $I'_j = (x_j, y_j)$ 为开区间, 满足

$$\sum_{j=1}^m |I'_j| = m \left(E - \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \varepsilon, \quad (3.174)$$

根据绝对连续性的定义可取充分小的 ε 使得

$$\sum_{j=1}^m |f(y_j) - f(x_j)| < \delta, \quad (3.175)$$

综上可得

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{j=1}^m |f(y_j) - f(x_j)| \leq \delta(b-a+1), \quad (3.176)$$

由 δ 任意性得证.

下面证明前述定理, 由于 $f' \in L^1([a, b])$, 因此 $g(x) = \int_a^x f' \in AC([a, b])$, 根据 Lebesgue 微分定理有 $g' = f', a.e.$, 根据引理有

$$f(x) - g(x) = f(a) - g(a) = f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) = \int_a^x f'. \quad (3.177)$$

推论 3.7

$f \in AC([a, b])$ 当且仅当存在 $g \in L^1([a, b])$ 使得对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g. \quad (3.178)$$

对于有界变差函数有 $\int_a^b |f'| dx \leq T_f(a, b)$, 而绝对连续函数可以使得该等号成立.

推论 3.8

若 $f \in AC([a, b])$, 则

$$\int_a^b |f'| = T_f(a, b). \quad (3.179)$$

证明 只需证明左边不小于右边, 对任意 $[a, b]$ 的分割 π 有

$$S_\pi = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f' \right| \leq \int_a^b |f'|, \quad (3.180)$$

对左边取上确界得证.

对于有界变差函数有分解

$$f(x) = \frac{1}{2}(T_f(a, x) + f(x)) - \frac{1}{2}(T_f(a, x) - f(x)), \quad (3.181)$$

可以证明绝对连续函数的全变差也绝对连续.

引理 3.10

若 $f \in AC([a, b])$, 则 $T_f(a, x) \in AC([a, b])$.

证明 对任意无交开区间组 $I_k = (a_k, b_k)$ 有

$$\sum_{k=1}^n |T_f(a, b_k) - T_f(a, a_k)| = \sum_{k=1}^n |T_f(a_k, b_k)| = \int_{\bigcup I_k} |f'|, \quad (3.182)$$

当 I_k 的总长度足够小时, 上面的积分也任意小 (可积函数积分的绝对连续性), 得证.

推论 3.9

任何绝对连续函数可以分解为两个单增绝对连续函数的差.



下面讨论绝对连续函数的一些几何特性.

对于连续函数 f , 它在 $[a, b]$ 中必有最小值、最大值 (均能取到), 再结合中值定理可知 f 将 $[a, b]$ 映为 $[m, M]$, 这里

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x). \quad (3.183)$$

若设 $f(s) = m, f(t) = M$ (不妨设 $s < t$), 则 $f([s, t]) = [m, M]$, 这时显然有

$$m(f([s, t])) = M - m = f(t) - f(s) = |f(t) - f(s)|, \quad (3.184)$$

也就是说 f 像集的测度有时可以通过端点值的差控制. 对于绝对连续函数有如下命题:

命题 3.3

若 $f \in AC([a, b])$, $E \subset [a, b]$ 零测, 则 $m(f(E)) = 0$, 即 f 将零测集映为零测集.



证明 对于零测集 $E \subset [a, b]$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset E$ 使得 $m(U) < \varepsilon$, 作开区间分解

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon, \quad f(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(I_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f([a_k, b_k]) \quad (3.185)$$

根据前面的讨论, 存在 $[s_k, t_k] \subset [a_k, b_k]$ 使得

$$f([a_k, b_k]) = [m_k, M_k] = |f(t_k) - f(s_k)|, \quad (3.186)$$

因此

$$m(f(U)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(t_k) - f(s_k)|, \quad (3.187)$$

这一系列 $[s_k, t_k]$ 内部两两不相交, 且其测度可以被控制

$$\sum_{k=1}^{\infty} |t_k - s_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = m(U) < \varepsilon, \quad (3.188)$$

再利用 f 的绝对连续性, 当 ε 任意小时 $m(f(U))$ 可以任意小, 得证.

反之考虑不绝对连续的 Cantor-Lebesgue 函数, 它将 C 映为 $[0, 1]$, 即不将零测集映为零测集.

可测函数将 Borel 可测集 “拉回” 到 Lebesgue 可测集, 而绝对连续函数可以将可测集映为可测集.

推论 3.10

若 $f \in AC([a, b])$, $E \subset [a, b]$ 可测, 则 $f(E)$ 可测.



证明 根据 E 的可测性知存在分解

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup F, \quad (3.189)$$

其中 K_i 为闭集, F 为零测集 (实际上是分解为了一个 F_σ 集与零测集的并), 而连续函数将紧集 (有界闭集) 映为紧集, 故 $f(K_i)$ 可测, 而 $f(F)$ 零测, 故 $f(E)$ 可测.

反之是否成立? 答案是否定的, 比如符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, 那么加上连续的条件又如何? 答案还是否定的, 比如函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3.190)$$

它将零测集映为零测集, 但不是有界变差函数, 故不绝对连续. 但是再加强一点即可.

定理 3.13

若 $f \in C([a, b]) \cap BV([a, b])$ 且将零测集映为零测集, 则 $f \in AC([a, b])$.



注 从后面的证明可以看出, 这里有界变差可以减弱为“几乎处处可导存在且可积”.

首先证明引理:

引理 3.11

设 f 在 $[a, b]$ 上可测, f' 在 $E \subset [a, b]$ 上存在且有界 M , 则 $m_*(f(E)) \leq Mm_*(E)$.



证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 考虑集合

$$E_n = \left\{ x \in E : \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M + \varepsilon, \forall 0 < |y - x| < 1/n \right\}, \quad (3.191)$$

则 $E_n \subset E_{n+1}$ 且有分解

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \quad (3.192)$$

对每个 E_n , 存在无交开区间 $I_{n,k}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| \leq m_*(E_n) + \varepsilon, \quad (3.193)$$

且可不妨设 $|I_{n,k}| < 1/n$ (细分即可), 则对任意 $s, t \in E_n \cap I_{n,k}$ 有

$$|f(s) - f(t)| \leq (M + \varepsilon)|s - t| \leq (M + \varepsilon)|I_{n,k}|, \quad (3.194)$$

注意到 $\mathbb{R}$ 中的任意集合都有

$$m_*(E) \leq \text{diam}(E) = \sup_{s, t \in E} |s - t|, \quad (3.195)$$

因此

$$m_*(f(E_n \cap I_{n,k})) \leq \text{diam}(f(E_n \cap I_{n,k})) \leq (M + \varepsilon)|I_{n,k}|, \quad (3.196)$$

$$m_*(f(E_n)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_*(f(E_n \cap I_{n,k})) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (M + \varepsilon)|I_{n,k}| \quad (3.197)$$

$$\leq (M + \varepsilon)(m_*(E_n) + \varepsilon) \quad (3.198)$$

$$\leq (M + \varepsilon)(m_*(E) + \varepsilon), \quad (3.199)$$

$$\Rightarrow m_*(f(E)) \leq (M + \varepsilon)(m_*(E) + \varepsilon), \quad (3.200)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证.

引理 3.12

设 $E \subset [a, b]$ 可测, f 为可测函数且 f' 在 E 上存在, 则 (f' 在 E 中可测且)

$$m_*(f(E)) \leq \int_E |f'|. \quad (3.201)$$



证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 定义

$$E_n = \{x \in E : n\varepsilon < |f'(x)| \leq (n+1)\varepsilon\}, \quad (3.202)$$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{f' \neq 0\}$, 对 $f(E_n)$ 有估计

$$m_*(f(E_n)) \leq (n+1)\varepsilon m(E_n) \leq \int_{E_n} |f'| + \varepsilon m(E_n), \quad (3.203)$$

因此

$$m_*(f(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*(f(E_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f'| + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \leq \int_E |f'| + \varepsilon m(E), \quad (3.204)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证.

下面证明前述定理.

$f \in BV([a, b])$ 说明 f' 可积且几乎处处存在, 对任意内部不相交的开区间 $I_k = (a_k, b_k)$, 存在分解 $A_k \sqcup B_k = I_k$ 使得 B_k 零测, f' 在 A_k 存在, 因此 (f 会将零测集映为零测集)

$$f(I_k) = f(A_k) \cup f(B_k) \Rightarrow m(f(I_k)) = m(f(A_k)), \quad (3.205)$$

进一步有 (考虑 $\mathbb{R}$ 上连续函数的性质)

$$|f(b_k) - f(a_k)| \leq m_*(f(I_k)) \leq \int_{A_k} |f'|, \quad (3.206)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \int_{\bigcup A_k} |f'|, \quad (3.207)$$

根据积分的绝对连续性可知上面的求和充分小, 即 $f \in AC([a, b])$.

3.4 几何上的应用

高维连续曲线可以定义为映射 $\vec{f}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, 这里 $\vec{f}$ 为连续向量值函数, 并且进一步可以将一些定义作如下推广

1. $\vec{f} \in BV([a, b])$ 当且仅当每个 $f_i \in BV([a, b])$, 此时 $T_{\vec{f}}(a, b)$ 即为曲线长度.
2. $\vec{f} \in AC([a, b])$ 当且仅当每个 $f_i \in AC([a, b])$.

容易证明, 如此推广后的有界变差/绝对连续性依旧有一些熟悉的结论.

命题 3.4

若 $\vec{f} \in BV([a, b])$, 则

$$\int_a^b |\vec{f}'(t)| dt \leq T_{\vec{f}}(a, b). \quad (3.208)$$

证明 设 $g(t) = T_{\vec{f}}(a, t)$, 由于 g 单调递增, 故

$$\int_a^b g'(t) dt \leq g(b) - g(a) = T_{\vec{f}}(a, b), \quad (3.209)$$

并且几乎处处有

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{\vec{f}}(t, t+h)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)|}{h} \geq |\vec{f}'(t)|. \quad (3.210)$$

故

$$\int_a^b |\vec{f}'(t)| dt \leq \int_a^b g'(t) dt \leq T_{\vec{f}}(a, b), \quad (3.211)$$

得证.

命题 3.5

若 $\vec{f} \in AC([a, b])$, 则

$$T_{\vec{f}}(a, b) \leq \int_a^b |\vec{f}'(t)| dt. \quad (3.212)$$

证明 取分割 $\pi: a = t_0 < \cdots < t_m = b$, 则

$$S_\pi = \sum_{i=1}^m |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| \quad (3.213)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) dt \right| \quad (3.214)$$

$$\leq \int_a^b |f'(t)| dt, \quad (3.215)$$

对 π 取上确界得证.

上面的证明用到了高维的三角不等式, 下面简单证明

引理 3.13

设 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ 可积, 则

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt. \quad (3.216)$$



证明

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| = \left\langle \int_a^b g(t) dt, \int_a^b g(s) ds \right\rangle \quad (3.217)$$

$$= \int_a^b \int_a^b \langle g(t), g(s) \rangle dt ds \quad (3.218)$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b |g(t)| |g(s)| dt ds \quad (3.219)$$

$$= \left(\int_a^b |g(t)| dt \right)^2, \quad (3.220)$$

得证.

因此当 $\vec{f} \in BV([a, b])$ 时, 称曲线**可求长**, 此时 $T_{\vec{f}}(a, b)$ 就是它的长度, 特别当 $\vec{f} \in AC([a, b])$ 时, 可以利用熟悉的方法 (微分) 计算曲线长, 即

$$L = T_{\vec{f}}(a, b) = \int_a^b |\vec{f}'(t)| dt. \quad (3.221)$$

除了常见的参数化, 曲线还有另一种参数化方法, 即定义

$$s(t) = T_{\vec{f}}(a, t), \quad t \in [a, b], \quad (3.222)$$

则 $0 \leq s(t) \leq T_{\vec{f}}(a, b)$, 这表示曲线的长度, 称为**弧长参数化**. 若设 $g(s) = \vec{f}(t)$, 则

$$T_{\vec{g}}(0, s) = s, \quad (3.223)$$

因此对任意 $0 \leq s < t \leq L$ 有

$$|g(t) - g(s)| \leq T_g(s, t) = t - s, \quad (3.224)$$

即 g 满足 Lipschitz 条件, 说明 $g \in AC([0, s])$ 且几乎处处有 $|g'(s)| = 1$.

Minkovski 容度

定义 3.15

设 $K \subset \mathbb{R}^2$ 为紧集, 定义开集 $K^\delta = \{x : d(x, K) < \delta\}$, 定义

$$\mathcal{M}(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta}, \quad (3.225)$$

若该极限存在则称之为 K 的 Minkovski 容度.



注 当 K 为曲线时, Minkovski 容度可以看作用 K 附近的细管道 K^δ 逼近 K 的过程.

对应地, 也可以考虑上下极限

$$\mathcal{M}^*(K) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta}, \quad \mathcal{M}_*(K) = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta}, \quad (3.226)$$

当二者相等时恰好等于 $\mathcal{M}(K)$.

例 3.11 若 $K = \{(0, 0)\}$ 时, $K^\delta = B_\delta(0)$, 即 $m(K^\delta) = \pi\delta^2$, 此时

$$\mathcal{M}(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta} = 0. \quad (3.227)$$

例 3.12 若 $K = [0, 1] \times [0, 1]$, 则 $m(K^\delta) = 2\delta + \pi\delta^2$, 此时

$$\mathcal{M}(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(K^\delta)}{2\delta} = 1. \quad (3.228)$$

例 3.13 若 $K = \overline{B_1(0)}$, 则 $K^\delta = B_{1+\delta}(0)$, $m(K^\delta) = \pi(1+\delta)^2$, 即 $\mathcal{M}(K) = +\infty$.

从上面的例子可以看出, Minkovski 容度有时可以刻画平面集合的维数, 不过下面我们主要着眼于曲线的情形.

定义 3.16 (简单曲线)

设 $\Gamma = \{\vec{f}(t) : t \in [a, b]\}$, 称 $\vec{f}$ 为简单曲线, 若 $\vec{f}$ (除端点外) 是单射.



命题 3.6

设 $\Gamma = \{\vec{f}(t) : t \in [a, b]\}$ 为简单可求长曲线, 长度为 L , 若 $\mathcal{M}_*(\Gamma) < \infty$, 则 $\mathcal{M}_*(\Gamma) \geq L$.



注 事实上, 如果曲线仅有有限处自交, 则它可以分解为不相交的部分, 因此命题也成立.

证明 Step 1. 证明 $m(\Gamma^\delta) \geq 2\delta|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)|$.

通过一些平移+旋转, 可以不妨设 $\vec{f}(a) = (0, 0)$, $\vec{f}(b) = (z, 0)$, 则此时 $z = |\vec{f}(b) - \vec{f}(a)|$. 任取 $t \in [0, z]$, 存在竖直直线 $l_t = \{(t, s) : s \in \mathbb{R}\}$, 根据曲线的连续性可断言 $\Gamma \cap l_t \neq \emptyset$.

设 $(t, \xi) \in \Gamma \cap l_t$, 则当 $|s - \xi| < \delta$ 时 $(t, s) \in \Gamma^\delta$, 即区间 $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subset (\Gamma^\delta)_t$, 说明 $m((\Gamma^\delta)_t) \geq 2\delta$, 根据 Fubini 定理可得

$$m(\Gamma^\delta) \geq \int_0^z m((\Gamma^\delta)_t) dt \geq 2\delta z = 2\delta|\vec{f}(b) - \vec{f}(a)|. \quad (3.229)$$

Step 2. 考虑分割 $\pi : a = t_0 < \dots < t_m = b$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 其中每一段都存在 $[a_i, b_i] \subset (t_{i-1}, t_i)$ 使得

$$\sum_i |\vec{f}(b_i) - \vec{f}(a_i)| \geq \sum_i |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| - \varepsilon, \quad (3.230)$$

定义 $\Gamma_i = \{\vec{f}(t) : t \in [a_i, b_i]\}$, 则所有的 Γ_i 互不相交, 因此当 δ 充分小时所有的 $\{\Gamma_i^\delta\}$ 互不相交, 进而

$$m(\Gamma^\delta) \geq \sum_i m(\Gamma_i^\delta) \geq 2\delta \sum_i |\vec{f}(b_i) - \vec{f}(a_i)| \geq 2\delta \left(\sum_i |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| - \varepsilon \right), \quad (3.231)$$

因此

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \geq \sum_i |\vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1})| - \varepsilon, \quad (3.232)$$

对 π 取上确界, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证.

命题 3.7

设 $\Gamma = \{\vec{f}(t) : t \in [a, b]\}$ 为简单可求长曲线, 长度为 L , 则 $\mathcal{M}^*(\Gamma) \leq L$.

证明 可以不妨设 $\vec{f}$ 为弧长参数化, 则不妨设 $a = 0, b = L$, 并且

$$|\vec{f}'(t)| = 1, a.e., \quad |\vec{f}(s) - \vec{f}(t)| \leq |s - t|. \quad (3.233)$$

Step 1. 断言: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在集合 $E_\varepsilon \subset [0, L]$ 使得 $m(E_\varepsilon) < \varepsilon$, 并且存在 $r_\varepsilon > 0$ 使得对任意 $t \in E_\varepsilon^c$ 有

$$\sup_{0 < |h| < r_\varepsilon} \left| \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} - \vec{f}'(t) \right| < \varepsilon. \quad (3.234)$$

定义

$$F_n(t) = \sup_{0 < |h| < 1/n} \left| \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} - \vec{f}'(t) \right|, \quad (3.235)$$

则 $F_n(t) \rightarrow 0, a.e.$, 由 Egorov 定理, 存在 $E_\varepsilon : m(E_\varepsilon) < \varepsilon$ 使得在 E_ε^c 中有 $F_n(t) \rightarrow 0$, 因此存在满足要求的 r_ε . 取 $\rho < r_\varepsilon$, 将 $[0, L]$ 分割为几乎不相交的小区间 $I_1, \dots, I_N$ 使得 $|I_k| = \rho$ (可以选出足够好的 ρ 使得恰好等分), 并且若 $I_k \subset E_\varepsilon$ 则称 I_k 为坏区间 (反之称为好区间). 设 $\Gamma_i = \{\vec{f}(t) : t \in I_i\}$, 则 $\Gamma \subset \bigcup_i \Gamma_i$, 即

$$\Gamma^\delta \subset \bigcup_i \Gamma_i^\delta \Rightarrow m(\Gamma^\delta) \leq m\left(\bigcup_i \Gamma_i^\delta\right). \quad (3.236)$$

Step 2. 若 I_i 是坏区间, 则对任意 $s, t \in I_i$ 有

$$|\vec{f}(s) - \vec{f}(t)| \leq |s - t| \leq |I_i| = \rho \Rightarrow \Gamma_i \subset \overline{B_\rho(z)} \Rightarrow \Gamma_i^\delta \subset B_{\rho+\delta}(z), \quad (3.237)$$

即有 $m(\Gamma_i^\delta) \leq C(\rho + \delta)^2 \leq C(\rho^2 + \delta^2)$, 并且坏区间至多有 ε/ρ 个, 因此

$$m\left(\bigcup_{I_i \subset E_\varepsilon} \Gamma_i^\delta\right) \leq C(\rho^2 + \delta^2) \frac{\varepsilon}{\rho} = O(\varepsilon(\rho + \frac{\delta^2}{\rho})). \quad (3.238)$$

Step 3. 若 $I_i = [a_i, b_i]$ 为好区间, 则存在 $t_0 \in [a_i, b_i]$ 使得 $t_0 \notin E_\varepsilon$, 根据断言有

$$\sup_{|h| < r_\varepsilon} |\vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0) - h\vec{f}'(t_0)| < \varepsilon|h|, \quad (3.239)$$

并且 $\Gamma_i = \{\vec{f}(t_0+h) : h \in [a_i - t_0, b_i - t_0]\}$, $0 \in [a_i - t_0, b_i - t_0]$ 说明 $|h| \leq b_i - a_i = |I_i| = \rho$, 通过平移、旋转, 可令 $\vec{f}(t_0) = (0, 0), \vec{f}'(t_0) = (1, 0)$, 因此对任意 $h \in [a_i - t_0, b_i - t_0]$ 有

$$|\vec{f}(t_0+h) - (h, 0)| < \varepsilon|h| \leq \varepsilon\rho, \quad (3.240)$$

这实际上说明 $\vec{f}(t_0+h)$ 的 x 坐标在 $h \pm \varepsilon\rho$ 内, y 坐标在 $\pm\varepsilon\rho$ 内, 因此可用长方形覆盖:

$$\Gamma_i \subset [a_i - t_0 - \varepsilon\rho, b_i - t_0 + \varepsilon\rho] \times [-\varepsilon\rho, \varepsilon\rho] \quad (3.241)$$

$$\Rightarrow \Gamma_i^\delta \subset [a_i - t_0 - \varepsilon\rho - \delta, b_i - t_0 + \varepsilon\rho + \delta] \times [-\varepsilon\rho - \delta, \varepsilon\rho + \delta] \quad (3.242)$$

即得

$$m(\Gamma_i^\delta) \leq (b_i - a_i + 2\varepsilon\rho + 2\delta)(2\varepsilon\rho + 2\delta) \quad (3.243)$$

$$= (\rho + 2\varepsilon\rho + 2\delta)(2\varepsilon\rho + 2\delta) \quad (3.244)$$

$$= 2\rho\delta + O(\varepsilon\rho^2 + \varepsilon\rho\delta + \delta^2) \quad (3.245)$$

$$= 2\rho\delta + O(\varepsilon\rho^2 + \delta^2). \quad (3.246)$$

而所有好区间的个数不超过 L/ρ , 因此

$$m\left(\bigcup_{I_i \not\subset E_\varepsilon} \Gamma_i^\delta\right) \leq \frac{L}{\rho}(2\rho\delta + O(\varepsilon\rho^2 + \delta^2)) \quad (3.247)$$

$$= 2L\delta + O(\varepsilon\rho + \frac{\delta^2}{\rho}), \quad (3.248)$$

Step 4. 综上可得

$$m(\Gamma^\delta) \leq m\left(\bigcup_{I_i \subset E_\varepsilon} \Gamma_i^\delta\right) + m\left(\bigcup_{I_i \not\subset E_\varepsilon} \Gamma_i^\delta\right) \quad (3.249)$$

$$= O(\varepsilon\rho + \frac{\varepsilon\delta^2}{\rho}) + 2L\delta + O(\varepsilon\rho + \frac{\delta^2}{\rho}) \quad (3.250)$$

$$= 2L\delta + O(\varepsilon\rho + \frac{\delta^2}{\rho}), \quad (3.251)$$

$$\frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \leq L + O(\frac{\varepsilon\rho}{\delta} + \frac{\delta}{\rho}), \quad (3.252)$$

取 $\rho = \delta/\varepsilon^{1/2}$, 则 $O(\frac{\varepsilon\rho}{\delta} + \frac{\delta}{\rho}) = O(\varepsilon^{1/2})$, 因此

$$\mathcal{M}^*(L) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \leq L + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (3.253)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证.

根据上面两个命题可得

推论 3.11

设 $\Gamma = \{\vec{f}(t) : t \in [a, b]\}$ 为简单可求长曲线, 长度为 L , 则 $\mathcal{M}(\Gamma) = L$.

等周不等式

定理 3.14 (等周不等式)

对于有界开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 为简单可求长曲线, 长度固定为 L , 则

$$m(\Omega) \leq \frac{L^2}{4\pi}. \quad (3.254)$$

证明 定义

$$\Omega_+(\delta) = \overline{\Omega}^\delta, \quad \Omega_-(\delta) = \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \geq \delta\}, \quad (3.255)$$

则 $\Omega_+(\delta) = \Omega_-(\delta) \sqcup \Gamma^\delta$, 考虑 $B_\delta(0)$, 则

$$\Omega + B_\delta(0) \subset \Omega_+(\delta), \quad \Omega_-(\delta) + B_\delta(0) \subset \Omega, \quad (3.256)$$

这里 $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. 由 Brunn-Minkovski 不等式可得

$$m(\Omega_+(\delta)) \geq [m(\Omega)^{1/2} + m(B_\delta(0))]^2 \quad (3.257)$$

$$\geq m(\Omega) + 2m(\Omega)^{1/2}m(B_\delta(0))^{1/2} \quad (3.258)$$

$$= m(\Omega) + 2\pi^{1/2}\delta^{1/2}m(\Omega)^{1/2}, \quad (3.259)$$

同理可得

$$m(\Omega) \geq m(\Omega_-(\delta)) + 2\pi^{1/2}\delta^{1/2}m(\Omega_-(\delta))^{1/2}, \quad (3.260)$$

相减可得

$$m(\Gamma^\delta) = m(\Omega_+(\delta)) - m(\Omega_-(\delta)) \geq 2\pi^{1/2}\delta[m(\Omega)^{1/2} + m(\Omega_-(\delta))^{1/2}], \quad (3.261)$$

因此

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \geq \pi^{1/2} \lim_{\delta \rightarrow 0} [m(\Omega)^{1/2} + m(\Omega_-(\delta))^{1/2}] = 2\pi^{1/2}m(\Omega)^{1/2}, \quad (3.262)$$

平方得证.